Vorkurs Mathematik

für Studierende der Geowissenschaften

2019

Andreas Nessel, Alexander Ullmann

CAU Kiel (PerLe)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis iii

Einleitung 1

1 Aussagen, Mengen und Quantoren 3
1.1 Aussagen und logische Verknüpfungen 3
1.2 Mengen 5
1.3 Die Quantoren $\exists$ und $\forall$ 8
1.4 Verneinung (Negation) von Aussagen 8
1.4.1 Negation von zusammengesetzten Aussagen 9
1.4.2 Negation von Aussagen mit Quantoren 9
1.4.3 Allgemeine Regel zum Negieren einer zusammengesetzten Aussage mit Quantoren 9

2 Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 11
2.1 Bruchrechnung 12
2.2 Rechenregeln für reelle Zahlen und Ordnungsrelationen 15
2.3 Intervalle 16

3 Potenzrechnung, Logarithmen und Rechnen mit Beträgen 19
3.1 Potenzen und Wurzeln 20
3.2 Der Logarithmus 22
3.2.1 Die Logarithmengesetze 23
3.3 Der Betrag 24

4 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen 25
4.1 Direktes Auflösen 25
4.2 Quadratische Gleichungen und Quadratische Ergänzung 27
4.3 Satz vom Nullprodukt 29
4.4 Substitution 30
4.5 Polynomdivision und das Horner-Schema 31
4.6 Betragsgleichungen 32
4.7 Ungleichungen 34

Index **35**

Einleitung

Dieser Kurs soll wichtige Bereiche Ihres Schulwissens möglichst konsistent aufbereiten. Er richtet sich insbesondere an Studierende, die Unsicherheiten im Umgang mit dem mathematischen Schulstoff haben, deren Mathematikunterricht länger zurückliegt oder deren mathematischer Schulstoff nicht alle für das Studium notwendige Voraussetzungen umfasste. Der Vorkurs muss sich auf das Notwendigste beschränken, soll Sie aber schon vertraut machen mit der präzisen Darstellung mathematischer Sachverhalte, wie sie das Studium vermitteln und verlangen wird.

Die dargestellten Inhalte sind vielerorts, sei es frei erhältlich im Internet, oder auf dem Büchermarkt in guten Darstellungen zu finden. In diesen Kurs fließen aber die speziellen Erfahrungen des Lehrbetriebes von Dozenten der ersten Semester Mathematik sowie aus dem aktuellen Schulbetrieb ein. Über Jahre konnten wir gravierende Lücken vieler Studienanfänger im Umgang mit elementaren Rechentechniken und Definitionen, wie Rechnen mit Beträgen oder den sicheren Umgang mit Ungleichungen beobachten. Wenn solche Lücken nicht aufgearbeitet werden, kann daran leicht das erfolgreiche Studium scheitern. Auch beobachteten wir bei vielen Studienanfängern und -anfängerinnen große Hemmungen, sich eigenständig an das Lösen auch einfacherer Übungsaufgaben zu machen. Das ist aber unumgänglich um mit dem Fortschreiten des Stoffes Schritt zu halten und nicht irgendwann „abgehängt“ zu werden. Eine weitere Hürde für das Studium stellt für viele das Formulieren und Aufschreiben eines vollständigen Beweises dar. Auch an diesen Aspekt des Mathematikstudiums wollen wir Sie in diesem Vorkurs bereits heranführen. Dieser Vorkurs soll jeder Studienanfängerin und jedem Studienanfänger die Chance bieten, im Studium von Anfang an alle Übungsangebote optimal für sich nutzen zu können und damit die Grundlage für ein erfolgreiches naturwissenschaftliches oder technisches Studium an der CAU Kiel bieten.

Dieses Skript basiert auf einer überarbeiteten Version eines Vorkurses Mathematik, der seit 2009 am KIT in Karlsruhe gehalten wird und ursprünglich von Frau Dr. Johanna Dettweiler für angehende Studierende der Mathematik entworfen wurde. Im Rahmen des Projekts PerLe wurde das Skript überarbeitet und ergänzt, dabei wurden Elemente aus bereits am Mathematischen Seminar in Kiel gehaltenen Vorkursen von Herrn Prof. Hermann König und Herrn Dr. Hauke Klein übernommen. Seit 2017 wird das Skript laufend überarbeitet durch Andreas Nessel, Patryk Brzezinski und Alexander Ullmann. Dies ist die erste Fassung des Skripts für Studierende der Geowissenschaften.

Kiel, im Oktober 2019 Alexander Ullmann

Kapitel 1

Aussagen, Mengen und Quantoren

1.1 Aussagen und logische Verknüpfungen

Wenn man sich über Mathematik verständigen will, ist es unumgänglich zu verstehen, was mathematische Aussagen sind und wie sie verknüpft werden können. Erst dann kann man verstehen, was bspw. ein mathematischer Beweis ist. Daher fängt dieser Vorkurs mit mathematischen Aussagen an und behandelt in Kürze, wie daraus durch verschiedene Verknüpfungen neue Aussagen entstehen.

Definition 1.1.1 ((Mathematische) Aussagen)**.** Eine *Aussage* im mathematischen Sinne ist ein sprachliches Gebilde, dessen Wahrheitsgehalt stets mit „wahr“ oder „falsch“ angegeben werden kann.

Beispiele 1.1.1. (1) Folgendes sind mathematische Aussagen:

- Dienstag ist ein Wochentag.
- Dienstag ist Montag.
- 2 ist eine gerade Zahl.
- $2 = 1$.

(2) Folgendes sind **keine** mathematische Aussagen:

- Mathematik macht Spaß.
- $x^2 + 2x + 1$.
- $x^2 + 1 = 0$. (Was ist x?).
- Diese Aussage ist falsch.

Ein zentraler Aspekt besteht nun darin, verschiedene Aussagen miteinander in Relation zu setzen. Dazu verwenden wir die folgenden *logischen Verknüpfungen* von Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$:

Bezeichnung	Symbol	Bedeutung der Verknüpfung
1. Negation	$\neg\mathcal{A}$	nicht $\mathcal{A}$
2. Konjunktion (und)	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
3. Disjunktion (oder)	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$
4. Implikation (Folgerung)	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$
5. Äquivalenz (genau dann, wenn)	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent, d.h. es gilt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$

Sie werden definiert über Wahrheitstafeln (dabei steht „w“ für wahr und „f“ für falsch):

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Aussagen, die durch logische Verknüpfung von anderen Aussagen entstehen, nennen wir gelegentlich auch *zusammengesetzte Aussagen*.

Definition 1.1.2 (Tautologische Äquivalenz)**.** Zwei (ggf. zusammengesetzte) Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *tautologisch äquivalent*, wenn Sie dieselben Wahrheitstafeln besitzen. Wir schreiben in diesem Fall $\mathcal{A} \,\dashv\models\, \mathcal{B}$.

Zum Beispiel gelten (Nachweis über Wahrheitstafeln):

1. $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \,\dashv\models\, \big(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}\big)$,
2. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \,\dashv\models\, (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$,
3. $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \,\dashv\models\, (\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$,
4. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \,\dashv\models\, (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$, aber $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist *nicht* tautologisch äquivalent zu $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.
5. $(\mathcal{A} \iff \mathcal{B}) \,\dashv\models\, \big(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\big)$

Beispiele aus dem alltäglichen Sprachgebrauch (Achtung, hierbei handelt es sich streng genommen nicht um Aussagen in unserem Sinn):

Zu 2. Die Aussage „Wenn Du nicht aufräumst, dann bekommst Du Stubenarrest“ lässt sich auffassen als Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ mit den Aussagen $\mathcal{A}$: *Du räumst nicht auf* und $\mathcal{B}$: *Du bekommst Stubenarrest*. In der Tat ist diese Aussage auch umgangssprachlich gleichwertig mit „Du räumst auf, oder Du bekommst Du Stubenarrest“, also mit $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

Zu 3. Ebenso lässt sich die Aussage „Wenn Du aufräumst, dann bekommst Du 10 Euro“ als Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ auffassen, dieses mal mit den Aussagen $\mathcal{A}$: *Du räumst auf* und $\mathcal{B}$: *Du bekommst 10 Euro*. Diese Aussage ist offenbar falsch genau dann, wenn sie eine „Lüge“ ist, wenn der Angesprochene also aufräumt, aber keine 10 Euro bekommt, wenn also $\mathcal{A}$ wahr und $\mathcal{B}$ falsch ist, bzw. wenn $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ gilt.

Zu 4. Die Aussage „Wenn es regnet, wird die Straße nass“ lässt sich als Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ auffassen mit den Aussagen $\mathcal{A}$: *Es regnet* und $\mathcal{B}$: *Die Straße wird nass*. Wenn die Straße also nicht nass wird, kann es nicht regnen, d.h. wir haben tautologische Äquivalenz zur Aussage $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$, aber wenn die Straße (wie auch immer) nass wird, können wird daraus nicht folgern, dass es auch regnet.

Man beachte:

- Das logische „oder“ ist nicht-ausschließend, also nicht zu verwechseln mit „entweder ... oder“.
- Ist $\mathcal{A}$ falsch, so ist die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ stets wahr („ex falso quodlibet“)! Zum Beispiel gilt $1 < 0 \Rightarrow 2 = 3$.
- Die Negation einer Implikation ist eine „und“-Aussage, vgl. dazu auch Punkt 3. oben und das zugehörige sprachliche Beispiel.

1.2 Mengen

„Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor: Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Für jedes Objekt muss eindeutig feststellbar sein, ob es zu der Menge gehört oder nicht. Die zu einer Menge gehörenden Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben $A, B, C, ...$ und ihre Elemente mit kleinen Buchstaben $a, b, c, ...$ bezeichnet. Wir schreiben

$a \in A$ für „a ist Element von A“ und
$a \notin A$ für „a ist nicht Element von A“.

Darstellung von Mengen. Elemente von Mengen werden durch geschweifte Klammern $\{...\}$ zusammengefasst. Dies geschieht entweder durch die *aufzählende Darstellung* oder durch die *beschreibende Darstellung*:

(1) Ein Beispiel zur **aufzählende Darstellung** von Mengen: Die Menge A der Buchstaben des Namens „Paula“, mit Unterscheidung großer und kleiner Buchstaben, ist:

$$\begin{aligned} A &:= \{P, a, u, l, a\} = \{P, a, u, l\} \\ &= \{l, P, u, a\}. \end{aligned}$$

oder durch die *Darstellung* $\{x|x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$, wie zum Beispiel:

(2) Die **beschreibende Darstellung** von Mengen hat allgemein die Gestalt $\{x|x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$, wie zum Beispiel: $B := \{x|x \in A, x \text{ ist ein Großbuchstabe }\} = \{P\}$ oder $C := \{x|x \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$.

(Dabei bedeutet $X := Y$ „X sei definiert als Y“).

Ist für ein x aus einer Menge X die Eigenschaft $\mathcal{E}$ in Gestalt eines Ausdruckes $\mathcal{E}(x)$ gegeben, so sind gleichbedeutend $\{x \in X|\, x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E}\}$ sowie $\{x \in X|\, \mathcal{E}(x) \text{ ist wahr}\}$, oder meist kurz $\{x \in X|\, \mathcal{E}(x)\}$. Die so definierte Menge ist dann eine Teilmenge von X (s.u.).

Man beachte: Eine bedingte (also teilweise) aufzählende Darstellung von *unendlichen* Mengen mit „Pünktchenschreibweise“ ist zwar oft intuitiv und auch anschaulicher, aber niemals exakt. Definiert man zum Beispiel $M := \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$, so suggeriert dies zwar $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^k$ für eine $k \in \mathbb{N}\}$, aber es könnte genauso gut sein

$$M = \{1, 2, 4, 8, 16, 30, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \ n \text{ ist die Anzahl der Teiler von } m! \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\},$$

oder

$$M = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, \ldots\} = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} n \text{ ist die maximale Anzahl von Gebieten, die man durch} \\ \text{geradliniges Verbinden von } m \text{ Punkten auf einem Kreisrand} \\ \text{aus einer Kreisscheibe ausschneidet für ein } m \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Eine beeindruckende Übersicht über bekannte Zahlenreihen (der auch diese Beispiele entnommen sind), finden Sie unter http://oeis.org/.

Definition 1.2.1 (Teil- und Obermengen)**.** Es seien A und B Mengen.

(1) Die Menge A heißt *Teilmenge* der Menge B, wenn jedes Element a aus A auch Element von B ist. Wir schreiben in diesem Fall $A \subseteq B$[1]. Ist A *nicht* Teilmenge von B, gibt es also eine Element $a \in A$ welches nicht Element von B ist, so schreiben wir $A \nsubseteq B$.

(2) Ist $A \subseteq B$, so nennt man B auch *Obermenge* von A und notiert $B \supseteq A$.

(3) Gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so sind die Mengen *gleich* und wir schreiben $A = B$.

[1] Oft wird in diesem Fall auch die Notation $A \subset B$ verwendet.

Beispiel 1.2.1. Definiere die Mengen $A := \{1,2,3\}$, $B := \{1,2,3,4\}$, $C := \{1,2,3,2,1\}$ und $D := \{2,4\}$. Dann gilt:

$$A \subseteq B,\ A \subseteq C,\ C \subseteq A,\ A = C \text{ und } A \not\subseteq D.$$

Definition 1.2.2 (Leere Menge)**.** Die Menge $\emptyset$, die kein Element besitzt, wird als *leere Menge* bezeichnet.

Achtung: Die leere Menge $\emptyset$ ist nicht zu verwechseln mit $\{\emptyset\}$ oder $\{0\}$; insbesondere ist $\{\emptyset\} \neq \emptyset$, aber $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ und $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (Anschaulich: Ein Sack, in dem ein leerer Sack ist, ist selbst nicht leer).

Definition 1.2.3 (Schnitt- und Vereinigungsmenge, relatives Komplement)**.** Seien A, B Mengen.

Die *Schnittmenge* $A \cap B$ von A und B wird definiert als

$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Die *Vereinigungsmenge* $A \cup B$ von A und B wird definiert als

$$A \cup B := \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Als *relatives Komplement von B in A* definiert man $A \setminus B := \{x \in A | x \notin B\}$.

Definition 1.2.4 (Das kartesiche Produkt von Mengen)**.** Seien A, B Mengen. Dann heißt die Menge aller *geordneten Paare* (a, b) von Elementen $a \in A$ und $b \in B$

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

das sog. *kartesische Produkt* od. auch *Kreuzprodukt von A und B*.

Man beachte: Zwei geordnete Paare $(a, b), (c, d)$ sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. Es gilt also zum Beispiel $(1, 2) \neq (2, 1)$, aber hingegen $\{1, 2\} = \{2, 1\}$!

Beispiel 1.2.2. Definiere die Mengen $A := \{1,2,3\}$ und $B := \{1,3,5\}$. Dann gilt

$$A \cap B = \{1,3\},\ A \cup B = \{1,2,3,5\}\,;\ \text{und } A \backslash B = \{2\},$$

sowie

$$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5)\}.$$

1.3 Die Quantoren ∃ und ∀

Die Quantoren ∃ und ∀ sind logische Symbole, die der abkürzenden Schreibweise in der Aussagenlogik dienen.

Sei X eine Menge und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, durch die für jedes $x \in X$ eine Aussage $\mathcal{E}(x)$ gegeben ist. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathcal{E}(\cdot)$, wobei der Punkt als Platzhalter für ein einzusetzendes Element steht und nennen $\mathcal{E}(\cdot)$ eine *Aussageform* . Dann bedeuten:

$$\big(\exists x \in X : \mathcal{E}(x)\big) : \quad \text{„Es existiert ein } x \in X \text{ so, dass } \mathcal{E}(x) \text{ wahr ist.“} \tag{1.3.1}$$

$$\text{bzw. „Es existiert ein } x \in X \text{ mit der Eigenschaft } \mathcal{E}.\text{“}$$

$$\big(\forall x \in X : \mathcal{E}(x)\big) : \quad \text{„Für alle } x \in X \text{ gilt } \mathcal{E}(x).\text{“} \tag{1.3.2}$$

Beispiel 1.3.1. Sei X die Menge der Teilnehmer dieses Vorkurses und $\mathcal{E}(x)$ die Aussage: „x trägt eine Brille.“

1. Dann bedeutet (1.3.1): „Mindestens ein Teilnehmer trägt eine Brille.“ In welchen Konstellationen ist diese Aussage wahr bzw. falsch?

2. (1.3.2) bedeutet: „Alle Teilnehmer tragen eine Brille.“

Diese Quantoren kann man auch iterativ verwenden: Seien X, Y Mengen, und sei $\mathcal{E}$ eine Aussageform auf $X \times Y$. Da man in diesem Fall zwei (möglicherweise) verschiedene Argumente für die Aussageform $\mathcal{E}$ hat, schreibt man hier auch $\mathcal{E}(\cdot, \cdot\cdot)$.
Dann bedeutet bspw.

$$\exists x \in X : (\forall y \in Y : \mathcal{E}(x,y)) : \text{„Es existiert ein } x \in X \text{ so, dass für alle } y \in Y \text{ die Aussage } \mathcal{E}(x,y) \text{ gilt.“} \tag{1.3.3}$$

Beispiel 1.3.2. Sei $X := Y := \mathbb{R}$. $\mathcal{F}(x,y)$ sei die Aussage $x \cdot y = 0$. Dann bedeutet (1.3.3): „Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ $x \cdot y = 0$ gilt.“
Ist diese Aussage wahr? Wenn ja, für welche x?

Beispiel 1.3.3 (Bedeutung der Reihenfolge der Quantoren)**.** Die Reihenfolge der auftretenden Quantoren ist für die Bedeutung der formulierten Aussage entscheidend. Die Aussagen $\forall x\, \exists y : \mathcal{E}(x,y)$ und $\exists y\, \forall x : \mathcal{E}(x,y)$ haben eine unterschiedliche Bedeutung. So unterscheiden sich die Aussagen „Alle Anwesenden haben einen Schuh, der passt.“ und „Es gibt einen Schuh, der allen Anwesenden passt.“ oder auch die Aussagen $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\; \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$ und $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = 1$.

1.4 Verneinung (Negation) von Aussagen

Oft gelingt es bei einfachen Aussagen, diese „nach Gefühl“ zu verneinen. Bei Aussagen, die selbst wieder Verknüpfungen anderer Aussagen sind, wird das jedoch immer unzuverlässiger. Es gibt jedoch klar Regeln, nach denen man vorgeht.

1.4.1 Negation von zusammengesetzten Aussagen

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen. Aus Abschnitt 1.1 sind die folgenden Regeln bekannt:

(1) $\neg\neg\mathcal{A} := \neg(\neg\mathcal{A}) \mathrel{=\!\mid\!\models} \mathcal{A}$.

(2) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\neg\mathcal{A}) \vee (\neg\mathcal{B})$.

(3) $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B})$.

(4) $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \mathrel{=\!\mid\!\models} \mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{B})$.

1.4.2 Negation von Aussagen mit Quantoren

Sei X eine Menge und $\mathcal{E}(\cdot)$ eine Aussageform auf X.

(5) $\neg(\forall x \in X : \mathcal{E}(x)) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\exists x \in X : \neg\mathcal{E}(x))$.

(6) $\neg(\exists x \in X : \mathcal{E}(x)) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\forall x \in X : \neg\mathcal{E}(x))$.

Beispiele:

zu (5) Die Negation der Aussage „Alle Teilnehmer waren pünktlich da“ ist die Aussage „Mindestens ein Teilnehmer war unpünktlich“.

zu (6) Die Negation der Aussage „Es gibt einen Teilnehmer mit Brille“ ist „Alle Teilnehmer tragen keine Brille“, was natürlich eher als „Kein Teilnehmer trägt eine Brille“ formuliert wird.

1.4.3 Allgemeine Regel zum Negieren einer zusammengesetzten Aussage mit Quantoren

Damit erhalten wir eine einfache Regel, wie das Negieren einer Aussage „mechanisch“ zu bewerkstelligen ist:

- Behalte die Reihenfolge bei!
- Vertausche $\exists$ und $\forall$.
- Verneine alle auftretenden zusammengesetzten Aussagen unter Verwendung der Regeln (1) - (4).

Beispiele: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen, X, Y Mengen und $\mathcal{E}$ eine Aussageform.

1. $\neg\big(\forall x \in X : (\exists y \in Y : \mathcal{E}(x,y))\big) \mathrel{=\!\mid\!\models} \big(\exists x \in X : (\forall y \in Y : \neg\mathcal{E}(x,y))\big)$. Die Negation der Aussage „Jeder Teilnehmer findet mindestens einen Satz des bisherigen Stoffes trivial“ ist die Aussage „Es gibt einen Teilnehmer der alle bisherigen Sätze nicht-trivial findet“
2. $\neg\big(\exists x \in X : (\forall y \in Y : \mathcal{E}(x,y))\big) \mathrel{=\!\mid\!\models} \big(\forall x \in X : (\exists y \in Y : \neg\mathcal{E}(x,y))\big)$. Die Negation der Aussage „Es gibt einen Teilnehmer, der alle Anwesenden bereits kennt“ ist „Alle Teilnehmer kennen mindestens einen der Anwesenden nicht“.

3. $\neg\big(\forall x \in X : (\exists y \in Y : \mathcal{E}(x) \Rightarrow \mathcal{E}(y))\big) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \big(\exists x \in X : (\forall y \in Y : \mathcal{E}(x) \wedge \neg\mathcal{E}(y))\big)$.

Beispiel 1.4.1. Seien X, Y Mengen und $\mathcal{E}$ eine Aussageform auf $X \times Y$, welche für alle $(x, y) \in X \times Y$ eine Aussage $\mathcal{E}(x, y)$ definiert. Formulieren Sie mithilfe von Quantoren die Aussage „Zu jedem $x \in X$ findet man genau ein $y \in Y$ so, dass $\mathcal{E}(x, y)$ gilt.“. Bilden Sie zudem die Negation dieser Aussage.

Kapitel 2

Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Wir gehen an dieser Stelle davon aus, dass die grundlegenden Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bekannt sind und werden daher nur unformal and die wesentlichen Eigenschaften erinnern. Im Rahmen von fortführenden Mathematik-Vorlesungen werden Sie zumindest teilweise auch eine stringente Konstruktion dieser Zahlenbereiche und Herleitung der charakterisierenden Eigenschaften kennenlernen.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, und jede Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$; es gibt also keine größte natürliche Zahl. In $\mathbb{N}$ sind die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ uneingeschränkt ausführbar, d.h. für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a + b, a \cdot b \in \mathbb{N}$.

Die Frage, ob die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gehört, ist nicht einheitlich geregelt, und hängt von der in der jeweiligen Veranstaltung bzw. vom Autor verwendeten Konvention ab. In den Grundvorlesungen wird aber meist die hier vorgestellte Variante gewählt, in der 0 *keine* natürlich Zahl ist, und man verwendet die zusätzliche Bezeichnung $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$: In $\mathbb{Z}$ besitzt die Gleichung $x + b = a$ ($a, b \in \mathbb{N}$, x unbekannt, a, b bekannt) in $\mathbb{Z}$ stets eine Lösung. Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. In $\mathbb{Z}$ gibt es im Gegensatz zu $\mathbb{N}$ keine kleinste Zahl. In $\mathbb{Z}$ sind die Rechenoperationen $+, -$ und $\cdot$ uneingeschränkt ausführbar.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \dfrac{a}{b} \text{ für ein } a \in \mathbb{Z} \text{ und ein } b \in \mathbb{N}\right\}$: Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen stets noch (unendlich viele) andere rationale Zahlen. Es gilt $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. In $\mathbb{Q}$ sind die Rechenoperationen $+, -$ und $\cdot$ sowie teilen durch Elemente $q \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ uneingeschränkt ausführbar.

Die reellen Zahlen Es gibt keine Zahl $q \in \mathbb{Q}$, für die gilt

$$q^2 = q \cdot q = 2.$$

Also: „$\sqrt{2}$ ist *irrational*".
Jede rationale Zahl lässt sich als endliche oder periodische Dezimalzahl schreiben und umgekehrt stellt jede endliche oder periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl dar. In diesem Kontext soll es genügen, sich unter der Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* alle möglichen Dezimalzahlen vorzustellen,

also endliche, periodische und nicht endliche, nicht periodische Dezimalzahlen. Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Beispiele 2.0.1. 1. $1 \in \mathbb{N}$.

2. $1,17 \in \mathbb{Q}$.

3. $\frac{1}{3} = 0.3333... \in \mathbb{Q}$ besitzt eine nicht abbrechende, aber periodische Dezimalentwicklung.

4. $\sqrt{2} = 1,41421... \in \mathbb{R}$ besitzt eine nicht abbrechende und nicht periodische Dezimalentwicklung. $\pi = 3.14159... \in \mathbb{R}$ besitzt eine nicht abbrechende und nicht periodische Dezimalentwicklung. Mit der Zahl π identifizieren wir die Länge eines Halbkreisbogens mit dem Radius 1.

2.1 Bruchrechnung

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist gleich der Menge aller sogenannten „Brüche“ der Gestalt $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$. Dabei nennt man die Zahl a den Zähler und die Zahl b den Nenner des Bruchs $\frac{a}{b}$. Zwei Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ haben den gleichen Wert bzw. stelle die gleiche rationale Zahl dar genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist, in diesem Fall gilt also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Insbesondere ändert sich der Wert der durch einen Bruch dargestellten rationalen Zahl nicht, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs mit derselben Zahl multipliziert (den Bruch *erweitert*) oder durch einen gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner teilt (den Bruch *kürzt*). Zum Beispiel gilt

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15}, \quad 2 = \frac{2}{1} = \frac{10}{5} \quad \text{und} \quad \frac{28}{42} = \frac{2 \cdot 14}{3 \cdot 14} = \frac{2}{3}.$$

Wir möchten die Kürzungs- und Erweiterungsregel zur Übung auch allgemein formulieren und beweisen:

Kürzungs- und Erweiterungsregel für rationale Zahlen. Es sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, und es sei $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}. \tag{2.1.1}$$

Beweis. Es gilt $a \cdot (n \cdot b) = n \cdot a \cdot b = b \cdot (n \cdot a)$, also ist $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$. □

Den Übergang von links nach rechts in der Identität (2.1.1) nennt man *Erweitern* des Bruchs, und den umgekehrten Übergang von rechts nach links *Kürzen* des Bruchs. Vor und nach konkreten Rechenoperationen mit Brüchen ist es üblich und zum Rechnen auch oft sinnvoll, die Brüche zunächst zu kürzen, so dass Zähler und Nenner teilerfremd sind.

Beispiele 2.1.1. Seien $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$ mit $a + b, p, q \neq 0$.

(a) $\frac{1}{2} = \frac{a+b}{2(a+b)} = \frac{a+b}{2a+2b}$, (b) $\frac{a^2 - b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a - b$,

(c) $\dfrac{24pq}{8p^2} = \dfrac{8p \cdot 3q}{8p \cdot p} = \dfrac{3q}{p}$,

(d) $\dfrac{p^2q + pq^2}{pq} = \dfrac{pq(p+q)}{pq} = p + q$.

Addition und Subtraktion von Brüchen

Brüche mit *gleichem* Nenner werden addiert/subtrahiert, indem man die Zähler addiert/subtrahiert: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$, dann gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}. \tag{2.1.2}$$

Brüche mit nicht-notwendigerweise gleichen Nennern werden hingegen zunächst auf den *Hauptnenner* gebracht und anschließend gemäß (2.1.2) addiert/subtrahiert: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d \neq 0$, dann gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Eine entsprechende Rechnung lässt sich auch für die Subtraktion durchführen, und wir erhalten allgemein die folgende Regel:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}. \tag{2.1.3}$$

Beispiele 2.1.2. Seien $a, b, x \in \mathbb{Z}$ mit $a + b, a - b, x, 2x + 1 \neq 0$.

(a) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{2 \cdot 7 + 3 \cdot}{5 \cdot 7} = \dfrac{19}{35}$,

(b) $\dfrac{5}{28} - \dfrac{8}{21} = \dfrac{5 \cdot 21 - 8 \cdot 28}{21 \cdot 28} = \dfrac{105 - 224}{588} = \dfrac{-119}{588} = -\dfrac{7 \cdot 17}{7 \cdot 84} = -\dfrac{17}{84}$,

(c) $\dfrac{a}{a-b} + \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a(a+b) + a(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \dfrac{a^2 + ab + (a^2 - ab)}{a^2 - b^2} = \dfrac{2a^2}{a^2 - b^2}$,

(d) $\dfrac{2x}{2x+1} - \dfrac{2x-1}{2x} = \dfrac{(2x)^2 - (2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)} = \dfrac{4x^2 - (4x^2 - 1)}{2x(2x+1)} = \dfrac{1}{2x(2x+1)}$.

In dem obigen Verfahren wurde der Hauptnenner stets durch Multiplikation der Nenner der zu verknüpfenden Brüche erzeugt. Dies ist nicht unbedingt notwendig, es reicht, ein *gemeinsames Vielfaches* der beiden Nenner zu bilden, welches im allgemeinen kleiner als das Produkt der Nenner ist und somit zu einfacheren Rechnungen führt. In dem obigen Beispiel (b) lauten die Nenner $28 = 4 \cdot 7$ und $21 = 3 \cdot 7$, man erhält daher ein gemeinsames Vielfaches als $(3 \cdot 4) \cdot 7 = 12 \cdot 7 = 84$, denn es ist

$$3 \cdot 28 = 3 \cdot (4 \cdot 7) = 84 \quad \text{und} \quad 4 \cdot 21 = 4 \cdot (3 \cdot 7) = 84.$$

Dies führt zu der einfacheren Rechnung

$$\frac{5}{28} - \frac{8}{21} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 28} - \frac{4 \cdot 8}{4 \cdot 21} = \frac{15}{84} - \frac{32}{84} = \frac{15 - 32}{84} = -\frac{17}{84}$$

Multiplikation von Brüchen

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d \neq 0$, dann wird das Produkt der Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ folgendermaßen erklärt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \tag{2.1.4}$$

Zwei Brüche werden also multipliziert, indem man jeweils Nenner und Zähler miteinander multipliziert.

Beispiele 2.1.3. Sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $x-1, x+1 \neq 0$.

(a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5}{21}$,

(b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$,

(c) $\frac{x-1}{2} \cdot \frac{6}{x^2-1} = \frac{6(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x+1}$.

Dabei vereinfachen sich die Rechnungen unter Umständen, wenn man bereits vorab Zähler und Nenner „über Kreuz“ kürzt, wie zum Beispiel:

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{10}{21} = \frac{\cancel{7}}{\cancel{2} \cdot 4} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 5}{3 \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{12}.$$

Division von Brüchen

Wir wollen nun zu einem gegebenen Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ das zugehörige *multiplikativ inverse Element* $(\frac{a}{b})^{-1}$ bestimmen, also diejenige rationale Zahl r mit der Eigenschaft $r \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot r = 1$. Nach der Regel zur Multiplikation von Brüchen gilt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{ab}{ab} = 1,$$

also gilt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Mit den üblichen Notationen $r^{-1} = 1 : r = \frac{1}{r}$ für $r \neq 0$ erhalten wir damit allgemein für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, c, d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Man dividiert also durch einen Bruch $\frac{c}{d} \neq 0$, indem man mit seinem *Kehrbruch* $\frac{d}{c}$ multipliziert.

Beispiele 2.1.4. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$.

(a) $\frac{1}{6} : \frac{3}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$,

(b) $\frac{ab}{6} : \frac{a}{3} = \frac{ab}{6} \cdot \frac{3}{a} = \frac{3 \cdot ab}{6a} = \frac{b}{2}$.

Wir formulieren abschließend alle Rechenregeln für Brüche in einer Übersicht.

Regeln der Bruchrechnung

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d \neq 0$.

Addition von Brüchen	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
Subtraktion von Brüchen	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$
Multiplikation von Brüchen	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
Teilen durch einen Bruch	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ (falls $a \neq 0$)
Division von Brüchen	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (falls $c \neq 0$)

2.2 Rechenregeln für reelle Zahlen und Ordnungsrelationen

Für das Rechnen mit den reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende **Rechenregeln:**

Kommutativgesetz der	Addition	$a + b = b + a$
	Multiplikation	$ab = ba$
Assoziativgesetz der	Addition	$(a+b)+c = a+(b+c)$
	Multiplikation	$(ab)c = a(bc)$
Distributivgesetz		$a(b+c) = ab + ac$
1. binomische Formel		$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel		$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel		$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Vorzeichenregeln		$-(-a) = a$
		$-(a+b) = -a - b$
		$-(a-b) = -a + b$

Wir vereinbaren für $x, y \in \mathbb{R}$:

$x = y$ steht für „x ist gleich y“,

$x < y$ steht für „x ist echt kleiner als y“,

$x \leq y$ steht für „x ist kleiner oder gleich y“,

$x > y$ steht für „x ist echt größer als y“,

$x \geq y$ steht für „x ist größer oder gleich y“.

Man beachte: Nach Definition gilt $x < y \Rightarrow x \leq y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, aber im allgemeinen gilt $x \leq y \not\Rightarrow x < y$!

Die reellen Zahlen können auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt. Für zwei beliebige reelle Zahlen x, y kann eindeutig entschieden werden, ob $x < y$, $x = y$ oder $x > y$ gilt. Auf der Menge der reellen Zahlen ist also eine Ordnungsstruktur gegeben. Für diese gelten folgende
Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$

Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$

Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

$ab > 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$)

$ab < 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b < 0$) oder ($a < 0$ und $b > 0$)

$ab = 0$ gilt genau dann, wenn ($a = 0$ oder $b = 0$)

Entsprechende Aussagen gelten auch für $\leq$ und $\geq$ anstelle von $<$ bzw. $>$.

Beispiel 2.2.1. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge
$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R} |$ Ungleichung bzw. Gleichung ist für x definiert und x erfüllt sie$\}$ an:

$x - 2 > 2x - 1$

$2(x - 1) < 6(x + \frac{5}{3})$

2.3 Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

Definition 2.3.1 (Intervalle)**.** Das *offene Intervall* (a, b) ist die Menge

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}.$$

Das *abgeschlossene Intervall* $[a, b]$ ist die Menge

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}.$$

Die *halboffenen Intervalle* sind definiert als die Mengen

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$$

Ist speziell $a = b$, so gelten $[a, a] = \{a\}$, bzw. $[a, a) = (a, a] = (a, a) = \emptyset$. Als Intervallgrenzen sind auch $\pm\infty$ zugelassen. Daraus ergeben sich fünf weitere unbeschränkte Intervalltypen:

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \qquad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$
$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \qquad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$
$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$$

Der Schnitt zweier Intervalle ist stets ein Intervall (evtl. die leere Menge). Die Vereinigung zweier Intervalle kann ein Intervall sein, muss es aber nicht.

Beispiel 2.3.1.

(a) $[3, 4] \cap [1, \infty) = [3, 4]$.

(b) $[-2, 0) \cap (-1, 0] = (-1, 0)$.

(c) $[4, 7] \cap [8, 9) = \emptyset$.

(d) $[7, 8] \cap [8, 9) = [8, 8] = \{8\}$.

(e) $[4, 5) \cup (-3, 1]$ ist kein Intervall.

(f) $[4, 5] \cup (-3, 4) = (-3, 5]$.

Kapitel 3

Potenzrechnung, Logarithmen und Rechnen mit Beträgen

In den folgenden Kapiteln werden wir uns mit verschiedenen Rechenregeln und -methoden beschäftigen, die Ihnen auch in der Schule bereits begegnet sein sollten. Bitte beachten Sie in Hinblick auf Ihr Studium folgende Punkte:

1. Die mathematischen Begriffe werden hier nicht ganz exakt, aber dafür in einem Stil eingeführt, der Ihnen auch aus der Schule noch geläufig sein sollte. Tatsächlich ist es ohne ausreichendes mathematisches Grundlagenwissen, zumeist gar nicht möglich, die hier verwendeten Begriffe exakt zu definieren. Beachten Sie aber, dass im Verlauf Ihres Studiums natürlich die in den jeweiligen Vorlesungen angegebenen Definitionen und Herleitungen relevant sind und nicht die – zuweilen unexakten – Begriffsbildungen aus der Schule oder diesem Vorkurs.

2. Bei dem hier präsentierten Stoff handelt es sich im wesentlichen um Rechentechniken, aber nicht um formale Beweise! Sie werden zu Beginn im Rahmen Ihrer Mathematik-Ausbildung auch Aufgaben gestellt bekommen, die einigen dieser Rechenaufgaben sehr ähnlich sehen, werden in dem Fall aber aufgefordert, einen formalen Beweis zu erstellen, der – meist erheblich – von diesen Rechentechniken abweicht. Dennoch sind ausreichende Rechenfähigkeiten unerlässlich, um überhaupt auf Lösungen bzw. Aussagen zu kommen, die man anschließend auch beweisen kann.

3. Wir verwenden in diesem Vorkurs keine Taschenrechner und – außer zu Übungs- und Anschauungszwecken – keine Computer-Algebra-Systeme (CAS). Bedenken Sie, dass Taschenrechner aufgrund des Problems endlichen Speichers so gut wie nie exakt rechnen können, da sie (fast) immer runden müssen. CAS sind hier im Vorteil, aber natürlich ist es gerade ein Bestandteil eines naturwissenschaftlichen Studiums, die Theorie zumindest in Grundzügen zu lernen, ohne auf elektronische Hilfsmittel angewiesen zu sein.

3.1 Potenzen und Wurzeln

Definition 3.1.1 (Ganzzahlige Potenzen)**.** Für Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$ wird die m-te Potenz von a definiert als

$$
\begin{aligned}
a^m &:= 1, && \text{falls } m = 0,\\
a^m &:= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-\text{mal}}, && \text{falls } m > 0,\\
a^m &:= \frac{1}{a^{-m}}, && \text{falls } m < 0, a \neq 0.
\end{aligned}
$$

Die Zahl a heißt *Basis*, m heißt *Exponent*.

Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden *Potenzgesetze*:

(a) $a^0 = 1$ und $0^0 = 1$,

(b) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

(c) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,

(d) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$,

(e) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$,

(f) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Definition 3.1.2 (Die q-te Wurzel)**.** Für $a \geq 0$ und $q \in \mathbb{N}$ ist die q-te *Wurzel* aus a diejenige eindeutig bestimmte Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, für die $x^q = a$ gilt.

Notation: $a^{\frac{1}{q}}$ oder $\sqrt[q]{a}$.

Für ungerade $q \in \mathbb{N}$ lässt sich $\sqrt[q]{a}$ auch für $a < 0$ definieren: in diesem Fall ist $x =$ die Lösung der Gleichung $x^q = a$, wir definieren daher $\sqrt[q]{a} := -\sqrt[q]{-a}$. (Z.B. ist $x = -2 = -\sqrt[3]{8}$ die Lösung von $x^3 = -8$, also $\sqrt[3]{-8} = -2$.)

Beispiele 3.1.1.

(a) $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^{10} = 2.$

(b) $6 = \sqrt{4}\sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6.$

(c) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4.$

(d) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2.$

(e) $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}.$

Man beachte, dass der Ausdruck $\sqrt{5}$ im letzten Beispiel bereits als Endergebnis angesehen wird, da mit diesem Symbol eine wohldefinierte reelle Zahl bezeichnet wird. Falls zusätzlich (warum auch immer) eine Dezimaldarstellung gewünscht wird, schreibt man z.B. $\cdots = \sqrt{5} \approx 2,2361$.

Achtung: die (zuweilen in der Schule verwendete) Notation $\sqrt{5} = 2,2361$ ist hingegen *nicht* zulässig! Gleichheit im mathematischen Sinn ist die (abstrakte) Gleichheit zweier Objekte (vgl. Kapitel 1) und kann nicht durch irgendwelche Konventionen (wie „Runden nach der vierten Nachkommastelle") relativiert werden. Selbst für einen Computer ist es unmöglich, eine exakte Dezimaldarstellung der Zahl $\sqrt{5}$ anzugeben, da er nur endlichen Speicher besitzt, die Zahl $\sqrt{5}$ aber irrational ist.

Definition 3.1.3 (Potenzen mit rationalem Exponenten)**.** Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ definieren wir die *(gebrochene) Potenz* a^r durch

$$a^r := a^{\frac{p}{q}} := \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Exkurs: Um die Definition von a^r mathematisch sauber zu rechtfertigen, muss man noch zeigen, dass die Potenz a^r *wohldefiniert* ist, also unabhängig von der konkreten Darstellung der rationalen Zahl r als Bruch $\frac{p}{q}$: man kann dieselbe Zahl r auf verschiedene Arten als Bruch schreiben, zum Beispiel ist $\frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, und es ist zu zeigen, dass durch die a priori verschiedenen Ausdrücke $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, in diesem Beispiel $\left(a^{\frac{1}{9}}\right)^3, \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2, a^{\frac{1}{3}}$, jedesmal *dieselbe* Zahl definiert wird. Formal ist also zu zeigen: ist $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ mit $p, m \in \mathbb{Z}$ und $q, n \in \mathbb{N}$, liegen also zwei - möglicherweise *verschiedene* - Darstellungen der Zahl $r \in \mathbb{Q}$ vor, so ist (dennoch) $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Wir geben kurz an, wie man dies einsehen kann: Es sei $r \in \mathbb{Q}$ und seien $p, m \in \mathbb{Z}$ und $q, n \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, also $np = qm$. Unter Verwendung der bereits bekannten Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln (aber nicht durch „Vorgriff" auf Rechenregeln für allgemeine Potenzen!) erhalten wir:

$$\begin{aligned} (a^{\frac{1}{q}})^p &= \sqrt[n]{\left((a^{\frac{1}{q}})^p\right)^n} = \sqrt[n]{(a^{\frac{1}{q}})^{np}} = \sqrt[n]{(a^{\frac{1}{q}})^{qm}} = \sqrt[n]{\left((a^{\frac{1}{q}})^q\right)^m} = \sqrt[n]{a^m} \\ &= \sqrt[n]{\left((a^{\frac{1}{n}})^n\right)^m} = \sqrt[n]{(a^{\frac{1}{n}})^{mn}} = \sqrt[n]{\left((a^{\frac{1}{n}})^m\right)^n} = (a^{\frac{1}{n}})^m. \quad \square \end{aligned}$$

Auch für rationale Exponenten gelten die obigen **Potenzgesetze**: Für alle $a, b \in (0, \infty)$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

(a) $a^0 = 1$ und $0^0 = 1$,

(b) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,

(c) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(d) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,

(e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$,

(f) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

Dies lässt sich auf die Definition von Wurzeln sowie die bereits formulierten Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten zurückführen, was wir hier nicht beweisen wollen. Der Anschauung halber formulieren wir hier einige Gesetze noch mit der Wurzelschreibweise: Seien $a \geq 0$ und $n, k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Dann gelten die sogenannten *Wurzelgesetze*

(a) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$,

(b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$,

(c) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$,

(d) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$,

(e) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k+n}}$.

Achtung: Wir haben für $a > 0$ den Ausdruck a^x nur für *rationales* x definiert. Um die Definition auch auf beliebige $x \in \mathbb{R}$ ausdehnen zu können, braucht man weiteres mathematisches Werkzeug wie den Grenzwert-Begriff.

Beispiel 3.1.2. (Rationalmachen des Nenners) Treten Brüche mit irrationalen Nennern $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $a > 0,\ n, m \in \mathbb{N},\ m < n$ auf, so erweitert man den Bruch mit $a^{1-\frac{m}{n}}$.

Zum Beispiel ist

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{1/3}} \cdot \frac{2^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Ist der Nenner der Gestalt $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ mit $a \neq b$, so wird der Bruch mit $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ erweitert, Beispiel:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

3.2 Der Logarithmus

Definition 3.2.1 (Der Logarithmus)**.** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $b \neq 1$. Unter dem *Logarithmus von a zur Basis b* versteht man diejenige eindeutig bestimmte reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $b^c = a$. Notation: $c = \log_b(a)$. .

Die Identität $c = \log_b(a)$ ist also äquivalent zur Gleichung $b^c = a$.

Achtung: Es handelt sich hierbei um die *übliche* Definition für Logarithmen, die Ihnen auch aus der Schule geläufig sein sollte. Diese ist jedoch aus mehreren Gründen problematisch:

- Wie oben bereits erwähnt, haben wir den Ausdruck b^c für irrationales $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ noch gar nicht definiert! Wir werden dies jedoch zunächst stillschweigend hinnehmen, in unseren konkreten Rechenbeispielen werden wir nur Ausdrücke b^c mit *rationalem c* behandeln, bzw. es ist stets sichergestellt, dass die aufretenden Logarithmen rational sind.

- Zudem muss sichergestellt werden, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $b \neq 1$ tatsächlich *genau eine* Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $b^x = a$ existiert. Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter auf diese Problematik ein, sondern verweisen ggf. auf die Mathematik-Vorlesung.

Beispiele 3.2.1.

(a) $2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$,

(b) $3^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -2$,

(c) $\log_x(36) = 2 \Leftrightarrow x = 6$,

(d) $\log_x\left(\frac{1}{64}\right) = -6 \Leftrightarrow x = 2$,

(e) $\log_5(125) = x \Leftrightarrow x = 3$,

(f) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right) = x \Leftrightarrow x = 4$,

(g) $\log_3(x) = 5 \Leftrightarrow x = 243$,

(h) $\log_2(x) = -5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{32}$.

Eine besondere Rolle spielt die sog. *Eulersche Zahl* e. Eine exakte Definition für e wollen und können wir zu diesem Zeitpunkt nicht geben, es sei nur daran erinnert, dass ungefähr gilt $e \approx 2,71828...$ (eine exakte Definition der Zahl e erfolgt ggf. in der Mathematik-Vorlesung). Für $a > 0$ notieren wir

$$\ln(a) := \log(a) := \log_e(a).$$

für den *natürlichen Logarithmus*. Wegen seiner herausragenden Rolle wird in der Mathematik der natürliche Logarithmus oft einfach als *der* Logarithmus bezeichnet.

Es gilt insbesondere

$$a = b^{\log_b a} \text{ und } a^c = e^{c \ln a} \text{ für alle } a, b > 0, b \neq 1, c \in \mathbb{Q},$$

und es gilt immer

$$\log_b 1 = 0, \quad \log_b b = 1 \text{ für alle } b > 0, b \neq 1.$$

3.2.1 Die Logarithmengesetze

Es seien $x, y, b > 0$ mit $b \neq 1$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden *Logarithmengesetze*:

(a) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$,

(b) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$,

(c) $\log_b(x^z) = z \cdot \log_b(x)$.

Für spezielle Werte von x, y, z erhält man weitere Regeln, zum Beispiel erhält man mit $x = 1$ aus (b) die Regel $\log_b(1/y) = -\log_b(y)$, und ein Spezialfall von (c) für Wurzeln lautet zum Beispiel $\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Logarithmen einer Zahl bezüglich verschiedener Basen lassen sich ineinander umrechnen: Seien $a, b, d > 0$ mit $b, d \neq 0$. Dann gilt

$$\log_b(a) = \log_b\left(d^{\log_d a}\right) = (\log_d(a))(\log_b(d))$$

also gilt die folgende *Umrechenformel*:

$$\log_d a = \frac{\log_b a}{\log_b d}, \quad \text{für alle } a, b, d > 0 \text{ mit } b, d \neq 0.$$

Beispiele 3.2.2. Beispiele zu den Logarithmengesetzen: Man vereinfache die folgenden Ausdrücke!

1. $\log(32) + \log(4) + \log(18) + \log(81)$
2. $\log \frac{2\sqrt{a+b}a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$
3. $\log(a+b) + 2\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a^2 - b^2)$

3.3 Der Betrag

Definition 3.3.1 (Der (reelle) Betrag)**.** Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann wird der *Betrag* $|a|$ *von* a definiert als

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} .$$

Beispiel 3.3.1. $|-3| = -(-3) = 3,$ da $-3 < 0;$ $|3| = 3,$ da $3 > 0;$ $|0| = 0.$

Man kann sich also den Betrag $|a|$ als den (nicht-negativen) Abstand der Zahl a zur 0 auf der Zahlengerade vorstellen. Allgemeiner definieren wie den Abstand zweier beliebiger Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ als Betrag der Differenz $|a - b|$.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gelten die folgenden Rechenregeln

(a) $|a| \geq 0$, und $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$,

(b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,

(c) $|a + b| \leq |a| + |b|$ („Dreiecksungleichung“),

(d) $|a| = \sqrt{a^2}$.

Beispiel 3.3.2. Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}$ an, für die folgenden Aussagen zutreffen:

(a) $a^2 = 4$,

(b) $a^2 > 3$

Beispiel 3.3.3. Schreiben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen und skizzieren Sie diese.

(a) $A := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < |x| \leq 2\}$,

(b) $B := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 2| < 5\}$

Beispiel 3.3.4. Auflösen von Betragsungleichungen Sei $\varepsilon > 0$. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ als Intervall an, für die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.

(a) $|x| \leq \varepsilon$,

(b) $|x - 2| < \varepsilon$.

Kapitel 4

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

In diesem Abschnitt sollen aus der Schule bekannte Techniken zum Lösen bestimmter Gleichungen wiederholt werden. Allgemein gesprochen handelt es sich bei der Aufgabe "Lösung einer Gleichung in einer Unbekannten"darum, einen vorgegebenen Term, in dem eine unbekannte Variable auftaucht (die wir meistens mit x bezeichnen) so gemäß bekannter zulässiger Regeln äquivalent umzuformen, dass man die Menge aller möglichen Zahlen x, die die durch diesen Term definierte Identität erfüllen, ablesen kann. Wir wollen uns zunächst mit dieser – mathematisch nicht exakten – Beschreibung zufrieden geben. Anstelle einer systematischen Beschreibung aller möglichen Verfahren zum Lösen von verschiedenen Typen von Gleichungen zeigen wir in den folgenden Abschnitten an Beispielen einige elementare Techniken und Vorgehensweisen.

4.1 Direktes Auflösen

Beispiel 4.1.1. "Löse"die Gleichung

$$3 \cdot (x + 4) = 15.$$

Der Arbeitsauftrag lautet also: Finde alle reellen Zahlen x so, dass nach Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht. Eine mathematisch exakte Bechreibung wäre: Bestimme konkret die "Lösungsmenge"dieser Gleichung, also die Menge

$$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \cdot (x + 4) = 15\}.$$

„Bestimme konkret“ soll dabei bedeuten, dass die Menge möglichst einfach dargestellt werden soll, etwa in der aufzählenden Darstellung oder als Vereinigung von Intervallen.

In diesem Fall ist ein direktes Auflösen der Gleichung möglich:

$$\begin{array}{rcll} 3 \cdot (x+4) & = & 15 & \\ 3x & = & 15 & \big| -12 \\ 3x & = & 3 & \big| : 3 \\ x & = & 1 & \end{array}$$

Es gilt also $\mathbb{L} = \{1\}$.

Probe durch Einsetzen: $3 \cdot (1+4) = 3 \cdot 5 = 15.$ ✓

Warum funktioniert dieses Vorgehen? Dies begründet sich darin, dass in jedem Schritt **Äquivalenzumformungen** vorgenommen wurden. Dies sind Umformungen, die die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern. Beispiele:

1. Addieren/Subtrahieren von reellen Zahlen

2. Multiplizieren mit/Dividieren durch reelle Zahlen ungleich 0 (!)

3. Hingegen ist das Quadrieren *keine* Äquivalenzumformung. Betrachte zum Beispiel die folgenden Umformungen:

$$\begin{array}{rcll} x &=& 4 & \mid (\cdot)^2 \\ x^2 &=& 16 & \mid \sqrt{\cdot} \\ x &=& \pm 4 & \end{array}$$

   Quadrieren führt unter Umständen dazu, dass „neue Lösungen“ hinzukommen. Daher ist in diesem Fall eine Probe notwendig! Wir zeigen dazu ein weiteres Beispiel. Man betrachte die folgenden Umformungen (die als reine *Implikationen* alle korrekt sind):

$$\begin{array}{rcll} 3 \cdot (x+5) &=& 3x+13 & \\ 3x+15 &=& 3x+13 & \mid -14 \\ 3x+1 &=& 3x-1 & \mid (\cdot)^2 \quad \text{(Achtung: Keine Äquivalenzumformung!)} \\ (3x+1)^2 &=& (3x-1)^2 & \\ 9x^2+6x+1 &=& 9x^2-6x+1 & \mid -9x^2 \mid -1 \\ 6x &=& -6x & \mid +6x \mid :12 \\ x &=& 0 & \end{array}$$

   Die Probe zeigt aber:

$$3 \cdot (0+5) = 15 \neq 13 = 3 \cdot 0 + 13.$$

4. Betrachte die folgende (problematische) Umformung:

$$\begin{array}{rcll} x^2 &=& x & \mid :x \\ x &=& 1 & \end{array}$$

   Hier ist die Lösung $x = 0$ ”verlorengegangen”. Dies liegt daran, dass beim Dividieren durch x der Fall $x = 0$ nicht zulässig ist. Dies lässt sich durch eine Fallunterscheidung ($x = 0$ vs. $x \neq 0$) lösen.

Wir betrachten schließlich noch zwei Sonderfälle, die beim Auflösen einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen auftreten können:

(1) Betrachte die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} 3\cdot(x+4) &= x+2\cdot(x+6) \\ 3x+12 &= x+2x+12 \\ 3x+12 &= 3x+12 && \big|\, -3x \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

Man erhält die *von x unabhängige wahre Aussage* $12 = 12$. Das bedeutet, dass **jede reelle Zahl** x die Gleichung löst, bzw. für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung gilt $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

(2) Betrachte die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} 3\cdot(x+4) &= x+2\cdot(x+5) \\ 3x+12 &= x+2x+10 \\ 3x+12 &= 3x+10 && \big|\, -3x \\ 12 &= 10 \end{aligned}$$

Man erhält die *von x unabhängige falsche Aussage* $12 = 10$. Das bedeutet, dass **keine reelle Zahl** x die Gleichung löst, bzw. für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung gilt $\mathbb{L} = \emptyset$.

Abschließend betrachten wir ein etwas komplizierteres Beispiel.

Beispiel 4.1.2. Löse die Gleichung

$$3 + 4\cdot 2^x = 35.$$

Hier ist es notwendig, zunächst den Term 2^x auf einer Seite zu isolieren, um durch Logarithmieren nach x auflösen zu können:

$$\begin{aligned} 3+4\cdot 2^x &= 35 && \big|\, -3 \\ 4\cdot 2^x &= 32 && \big|\, :4 \\ 2^x &= 8 && \big|\, \ln(\cdot) \\ x\cdot\ln(2) &= \ln(8) && \big|\, :\ln(2) \\ x &= \tfrac{\ln(2)}{\ln(8)} && \big|\, \text{Allgemeine Log-Regel: } \tfrac{\ln(a)}{\ln(b)} = \log_b(a) \\ x &= \log_2(8) && \big|\, \text{Verwende: } 8 = 2^3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Es gilt also $\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R} \mid 3 + 4\cdot 2^x = 35\} = \{3\}$.

4.2 Quadratische Gleichungen und Quadratische Ergänzung

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Unter einer *quadratischen Gleichung* verstehen wir eine Gleichung der Gestalt

$$x^2 + px + q = 0, \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}. \tag{4.2.1}$$

Allgemeiner wird auch eine Gleichung der Gestalt $ax^2 + bx + c = 0, \mathbb{D} = \mathbb{R}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ als quadratische Gleichung bezeichnet – diese lässt sich jedoch durch Teilen durch a in die Gestalt (4.2.1) (mit $p = b/a$ und $q = c/a$) überführen.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von (4.2.1) lässt sich allgemein mithilfe der sogenannten Methode des *Quadratischen Ergänzens* bestimmen: Zunächst werden die Terme in x^2 und x durch eine binomische Formel ausgedrückt, und anschließend ein Korrekturterm eingeführt, um den „x-freien Teil“ des binomischen Terms zu neutralisieren:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right). \tag{4.2.2}$$

Somit gilt

$$x \in \mathbb{L} \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

im Fall $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ ist also $\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right\}$. Eine übliche (mathematisch etwas laxe) Formulierung hierfür ist die sogenannte *p-q-Formel* zur Lösung quadratischer Gleichungen:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Wir betrachten dazu zunächst ein einfaches Zahlenbeispiel:

Beispiel 4.2.1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - x - 6 = 0,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Quadratisches Ergänzen liefert formal

$$x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4},$$

also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4} \Longleftrightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Longleftrightarrow x = -2 \vee x = 3. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der gegebenen quadratischen Gleichung ist also $\mathbb{L} = \{-2, 3\}$.

Wir kehren zu dem allgemeinen Fall zurück: Offenbar gibt es genau drei mögliche Fälle für die Gestalt der Lösungsmenge der quadratischen Gleichung (4.2.1):

Fall 1: $\frac{p^2}{4} - q > 0$	(4.2.1) besitzt genau zwei Lösungen, $\mathbb{L} = \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right\}$,
Fall 2: $\frac{p^2}{4} - q = 0$	(4.2.1) besitzt genau ein Lösung, $\mathbb{L} = \left\{ -\frac{p}{2}\right\}$,
Fall 3: $\frac{p^2}{4} - q < 0$	(4.2.1) besitzt keine Lösungen, $\mathbb{L} = \emptyset$.

Dies lässt sich auch den den folgenden Schaubildern veranschaulichen, in denen jeweils die zur Gleichung (4.2.1) in den drei verschiedenen Fällen skizziert ist.

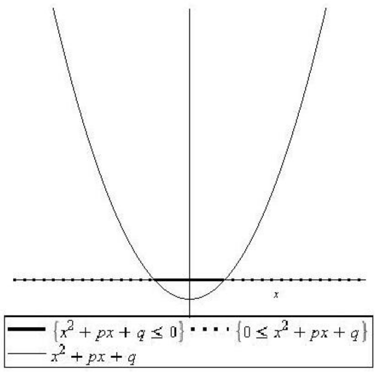

Bild 1

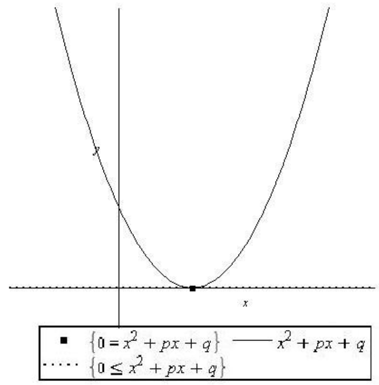

Bild 2

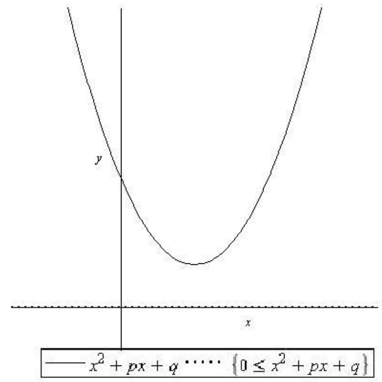

Bild 3

4.3 Satz vom Nullprodukt

Die folgenden Beispiele stellen Anwendungen des „Satzes vom Nullprodukt“ dar, welcher besagt, dass das Produkt zweier reeller Zahlen genau dann gleich 0 ist, wenn einer der Faktoren gleich 0 ist, formal geschrieben also:

$$\forall p, q \in \mathbb{R} : p \cdot q = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee q = 0.$$

Beispiel 4.3.1. Löse die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 5x = 0.$$

Ausklammern von x bringt diese Gleichung auf die Gestalt

$$x \cdot (x^2 - 6x + 5) = 0.$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt sind die möglichen Lösungen also $x_1 = 0$ (was den ersten Faktor zu 0 macht) und die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 6x + 5 = 0$, diese sind $x_2 = 1$ und $x_3 = 5$. Insgesamt erhält man als Lösungsmenge also $\mathbb{L} = \{0, 1, 5\}$.

Beispiel 4.3.2. Löse die Gleichung

$$e^{2x} - 4e^x = 0.$$

Wegen $e^{2x} = e^{x+x} = e^x \cdot e^x$ ist diese Gleichung äquivalent zu

$$e^x \cdot (e^x - 4) = 0.$$

Wegen $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist der erste Faktor immer positiv, die Lösungen der Gleichung sind also genau diejenigen x, die die Gleichung $e^x - 4 = 0$ lösen:

$$\begin{array}{rcll} e^x - 4 & = & 0 & \mid +4 \\ e^x & = & 4 & \mid \ln(\cdot) \\ x & = & \ln(4) & \end{array}$$

Man erhält also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\ln(4)\}$.

4.4 Substitution

In diesem Abschnitt geht es um Gleichungen, die sich durch geeignete Substitution auf Gleichungen vom bekannten Typ reduzieren lassen, also auf Gleichungen, für die bekannt ist, wie man sie löst, etwa durch Auflösen oder Formeln. Anschließend gewinnt man durch Resubstitution die Lösungen der ursprünglichen Gleichung. Wir demonstrieren dieses Vorgehen an einigen Beispielen.

Beispiel 4.4.1. Löse die Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Substitution: $z = x^2$. Dann ist $z^2 = (x^2)^2 = x^4$.

Mit dieser Substitution nimmt die Gleichung die folgende Gestalt an:

$$z^2 - 10z + 9 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = 9$.

Resubstitution: $x = \pm\sqrt{z}$.

Wir erhalten so aus $z_1 = 1$ die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ und aus $z_1 = 9$ die Lösungen $x_3 = 3$ und $x_4 = -3$. Man erhält also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1, -1, 3, -3\}$ der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel 4.4.2. Löse die Gleichung

$$x^6 + 9x^3 + 8 = 0.$$

Substitution: $z = x^3$. Dann ist $z^2 = (x^3)^2 = x^6$.

Mit dieser Substitution nimmt die Gleichung die folgende Gestalt an:

$$z^2 + 9z + 8 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $z_1 = -1$ und $z_2 = -8$.

Resubstitution: $x = \sqrt[3]{z}$.

Man beachte, dass jede relle Zahl genau eine dritte Wurzel besitzt! In diesem Fall erhalten wir aus $z_1 = -1$ die Lösung $x_1 = \sqrt[3]{-1} = -1$ (denn $(-1)^3 = -1$) und $x_2 = \sqrt[3]{-8} = -2$ (denn $(-2)^3 = 8$) damit die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x_1, x_2\} = \{-1, -2\}$ der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel 4.4.3. Löse die Gleichung

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0.$$

Substitution: $z = e^x$. Dann ist $z^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$.

Mit dieser Substitution nimmt die Gleichung die folgende Gestalt an:

$$z^2 + 2z - 3 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = -3$.

Resubstitution: $x = \ln(z)$.

Wir erhalten so aus $z_1 = 1$ die Lösungen $x_1 = \ln(1) = 0$. Die Lösung $z_2 = -3$ hingegen liefert keine zusätzliche Lösung, da die Resubstitution $x_2 = \ln(-3)$ nicht zulässig ist, bzw. die Gleichung $e^x = -3$ keine Lösung besitzt, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wir erhalten damit die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x_1\} = \{0\}$ der ursprünglichen Gleichung.

4.5 Polynomdivision und das Horner-Schema

Wir zeigen beispielhaft, wie sich polynomiale Gleichungen höherer Ordnung durch Reduktion der Ordnung lösen lassen.

Beispiel 4.5.1. Bestimme alle Lösungen der folgenden kubischen Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$$

1.Schritt: Zur Reduktion der Ordnung muss eine Lösung bekannt sein. Das Standardverfahren ist hierzu das „Raten“ einer ersten Lösung, wobei man die Teiler des *Absolutglieds*, das heisst der „Zahl ohne x“, ausprobiert.[1] In diesem Fall ist das Absolutglied 40:

$$\begin{array}{rcccccl}
1: & 1^3 & -3\cdot 1^2 & -18\cdot 1 & +40 & = & 20 \neq 0 \\
-1: & (-1)^3 & -3\cdot(-1)^2 & -18\cdot(-1) & +40 & = & 54 \neq 0 \\
2: & 2^3 & -3\cdot 2^2 & -18\cdot 2 & +40 & = & 0
\end{array}$$

Somit ist $x_1 = 2$ eine Lösung.

2.Schritt: Abspalten der Nullstelle $x_1 = 2$. Ein Weg hierfür ist die Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\big(\; x^3 - 3x^2 - 18x + 40\big) : \big(x - 2\big) = x^2 - x - 20 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad -x^2 - 18x \\
\qquad \underline{\;\; x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad -20x + 40 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; 20x - 40} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

[1] Dies begründet sich in dem folgenden Zusammenhang: Ist $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}$, und ist $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Nullstelle mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{Z}$, so ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n. Im häufig aufretenden Spezialfall, in dem der sogenannte *Leitkoeffizient* $a_n = 1$ ist, erhält man: Jede Nullstelle ist entweder ganzzahlig und ein Teiler von a_0, oder sie ist irrational.

Es gilt also

$$x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = (x-2) \cdot (x^2 - x - 2x).$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt erhalten wir die übrigen Lösungen aus der Gleichung

$$x^2 - x - 20 = 0.$$

Diese sind $x_2 = 5$ und $x_3 = -4$, und wir erhalten insgesamt die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{2, 5, -4\}.$$

Anmerkung/Beobachtung Mithilfe der ermittelten Lösungen kann man *faktorisieren*:

$$x^3 - 3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 40 = (x-2) \cdot (x^2 - x - 20) = (x-2)(x-5)(x+4)$$

Für das weitere Vorgehen, insbesondere das Horner-Schema, verweisen wir an dieser Stelle auf die Vorlesung.

4.6 Betragsgleichungen

Wir betrachten nun Gleichungen, in denen Beträge vorkommen. Um diese zu lösen muss man in der Regel Fallunterscheidungen vornehmen.

Beispiel 4.6.1. Löse die Gleichung

$$|2x - 4| = 6.$$

Um den Betrag aufzulösen, nehmen wir die Fallunterscheidung vor, ob $2x-4 \geq 0$ oder $2x-4 < 0$ ist, was gleichbedeutend mit der Fallunterscheidung $x \geq 2$ oder $x < 2$ ist.

Fall 1: $x \geq 2$, also $2x - 4 \geq 0$. Dann ist $|2x-4| = 2x - 4$, und wir können die Gleichung folgendermaßen lösen:

$$\begin{array}{rcll} |2x-4| &=& 6 & \\ 2x-4 &=& 6 & \quad \big| +4 \quad \big| :2 \\ x &=& 5 & \end{array}$$

Fall 2: $x < 2$, also $2x - 4 < 0$. Dann ist $|2x-4| = -(2x-4)$, und wir können die Gleichung folgendermaßen lösen:

$$\begin{array}{rcll} |2x-4| &=& 6 & \\ -(2x-4) &=& 6 & \quad \big| \cdot(-1) \quad \big| +4 \quad \big| :2 \\ x &=& -1 & \end{array}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich insgesamt $\mathbb{L} = \{-1, 5\}$.

Beispiel 4.6.2. Löse die Gleichung

$$|2x+4| - |3x-6| = 3.$$

Um die Beträge aufzulösen, nehmen wir mehrere Fallunterscheidungen vor:

Fall 1: $2x + 4 \geq 0$, also $x \geq -2$. Dann ist $|2x + 4| = 2x + 4$. Um den zweiten Betragsterm auszulösen, nehmen wir eine weitere Fallunterscheidung vor:

Fall 1.1: $3x - 6 \geq 0$, also $x \geq 2$. In diesem Fall ist $|3x - 6| = 3x - 6$, und wir können die Gleichung folgendermaßen auslösen:

$$\begin{array}{rcll} |2x+4| - |3x-6| & = & 3 & \\ 2x + 4 - (3x-6) & = & 3 & \\ -x + 10 & = & 3 & \quad \big| -10 \quad \big| \cdot(-1) \\ x & = & 7 & \end{array}$$

Da $x = 7$ die Bedingungen $x \geq -2$ und $x \geq 2$ erfüllt, erhalten wir die erste Lösung $x_1 = 7$.

Fall 1.2: $3x - 6 < 0$, also $x < 2$. In diesem Fall ist $|3x - 6| = -(3x - 6)$, und wir können die Gleichung folgendermaßen auflösen:

$$\begin{array}{rcll} |2x+4| - |3x-6| & = & 3 & \\ 2x + 4 - \big(-(3x-6)\big) & = & 3 & \\ 2x + 4 + 3x - 6 & = & 3 & \\ 5x - 2 & = & 3 & \quad \big| +2 \quad \big| :5 \\ x & = & 1 & \end{array}$$

Da $x = 1$ die Bedingungen $x \geq -2$ und $x < 2$ erfüllt, erhalten wir die zweite Lösung $x_2 = 1$.

Fall 2: $2x + 4 < 0$, also $x < -2$. Dann ist $|2x + 4| = -(2x + 4) = -2x - 4$. Um den zweiten Betragsterm auszulösen, nehmen wir wieder eine weitere Fallunterscheidung vor:

Fall 2.1: $3x - 6 \geq 0$, also $x \geq 2$. Dieser Fall kann nicht auftreten, da wir bereits $x < -2$ annehmen.

Fall 2.2: $3x - 6 < 0$, also $x < 2$. In diesem Fall ist $|3x - 6| = -(3x - 6)$, und wir können die Gleichung folgendermaßen auflösen:

$$\begin{array}{rcll} |2x+4| - |3x-6| & = & 3 & \\ -2x - 4 - \big(-(3x-6)\big) & = & 3 & \\ -2x - 4 + 3x - 6 & = & 3 & \\ x - 10 & = & 3 & \quad \big| +13 \\ x & = & 13 & \end{array}$$

Da $x = 13$ die Bedingungen $x < -2$ verletzt, liefert dies *keine* weitere Lösung der ursprünglichen Gleichung. Dies zeigt auch die folgende Probe:

$$|2 \cdot 13 + 4| - |3 \cdot 13 - 6| = |30| - |33| = 30 - 33 = -3 \neq 3.$$

Insgesmt erhalten wir die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x_1, x_2\} = \{7, 1\}$.

4.7 Ungleichungen

Mit ähnlichen Methoden wie bisher vorgestellt lassen sich auch einige Typen von Ungleichungen lösen. Eine Besonderheit hierbei ist, dass sich bei Ungleichungen das Vorzeichen ändert, sobald man mit einem negativen Faktor multipliziert. Wir bringen dazu wieder ein Beispiel.

Beispiel 4.7.1. Es soll die folgende Ungleichung gelöst werden:

$$\frac{x}{x+1} < 2. \tag{4.7.3}$$

Es ist wiederum als erstes zu klären, was diese Aufgabenstellung eigentlich bedeutet. Zunächst tritt an dieser Stelle ein neues Phänomen auf dadurch, dass der Term "$x+1$ïm Nenner steht. Da man nicht durch 0 teilen darf, muss gelten $x+1 \neq 0$, also $x \neq -1$. Es wird also von vornherein die Menge der mögliche Lösungen x eingeschränkt. In solche einem Fall bezeichnet man die Menge aller „zulässigen“ $x \in \mathbb{R}$, für die die in der (Un-)Gleichung auftretenden Terme überhaupt sinnvoll definiert sind, auch als die **Definitionsmenge** der (Un-)Gleichung und verwendet hierfür zuweilen die Bezeichung $\mathbb{D}$. In diesem Beispiel wäre die Definitionsmenge also

$$\mathbb{D} := \mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$

Die Aufgabenstellung bedeutet nun also: Bestimme alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, die die Ungleichung (4.7.3) erfüllen. Die **Lösungsmenge** ist in diesem Fall definiert als

$$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{D} \mid x \text{ erfüllt } (4.7.3)\}.$$

Man geht nun analog zum Lösen eine Gleichung vor, indem man versucht, durch Äquivalenzumformungen die gegebene Ungleichung so umzuformen, dass man die Lösungsmenge ablesen kann. Hierzu muss man nun aber die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen beachten. In einem ersten Schritt wollen wir wieder die gegebene Ungleichung mit dem Term $x + 1$ multiplizieren, müssen hierbei jedoch das Vorzeichen beachten! Daher nehmen wir eine Fallunterscheidung vor (dies wird uns auch in späteren Beispielen zum Lösen von Ungleichungen öfter begegnen):

Es sei $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Fall 1: $x + 1 > 0$, also $x > -1$. In diesem Fall gilt

$$\frac{x}{x+1} < 2 \Leftrightarrow x < 2 \cdot (x+1) \Leftrightarrow x < 2x + 2 \Leftrightarrow 0 < x + 2 \Leftrightarrow x > -2.$$

Da wir $x > -1$ vorausgesetzt haben, gilt insbesondere auch $x > -2$, also ist die Ungleichung $\frac{x}{x+1} < 2$ *für alle* $x \in (-1, +\infty)$ erfüllt, es gilt also $\mathbb{L} \cap (-1, +\infty) = (-1, +\infty)$.

Fall 2: $x + 1 < 0$, also $x < -1$. In diesem Fall gilt

$$\frac{x}{x+1} < 2 \Leftrightarrow x > 2 \cdot (x+1) \Leftrightarrow x > 2x + 2 \Leftrightarrow 0 > x + 2 \Leftrightarrow x < -2.$$

Dies zeigt $\mathbb{L} \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -2)$.

Die gesamte Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty) = \mathbb{R}\backslash[-2, -1]$.

Neben dem rechnerischen Weg lässt sich die Lösung in beiden Fällen auch graphisch veranschaulichen - man beachte aber, dass eine Skizze zwar hilfreich sein kann, aber in der Regel niemals eine konkrete Recnung ersetzt!

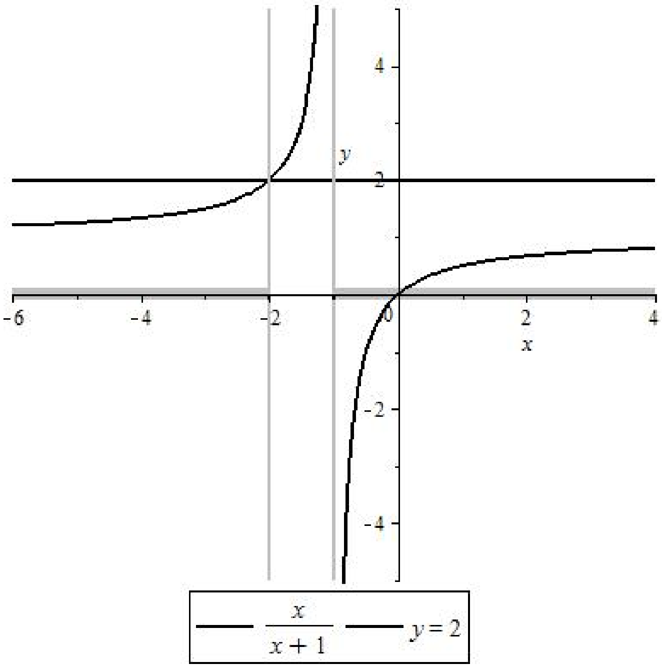

Bild 4.A

Abschätzen

Beim Arbeiten mit Ungleichungen sind oft keine äquivalenten Umformungen gefordert, sondern nur Folgerungen.

Beispiel: Sei x eine negative reelle Zahl. Dann gilt die Ungleichung

$$x < 0.$$

Hieraus kann man die folgende Ungleichung folgern:

$$x < 1.$$

Dabei kann man *nicht* die erste Ungleichung äquivalent und die zweite umformen. Stattdessen argumentiert man folgendermaßen: Es gilt $x < 0$ und $0 < 1$, also folgt $x < 1$.

Dieses Vorgehen bezeichnet man auch als **Abschätzen**.