Vorkurs Mathematik: Lösungsversuche

Aufgabe 1

Wahre Aussagen sind zum Beispiel:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{C},\ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D},\ \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{E},\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F},\ \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{A}.$$

Weitere wahre Aussagen: $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F}$, ...

Aufgabe 2

a) Es ist $A = \{x \,|\, x \text{ ist eine Haupthimmelsrichtung}\}$. Die Menge B besteht offenbar aus den ungerade natürlichen Zahlen, die kleiner als 40 sind. Eine natürliche Zahl n ist genau dann ungerade, wenn sie von der Gestalt $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Dies ergibt:

$$B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 40,\ \exists\, k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}.$$

b) *Zur Menge C:* In C liegen diejenigen Quadratzahlen $n = k^2 = (-k)^2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $|k| \leq 7$, also ist

$$C = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}.$$

Zur Menge D: Definiere die Hilfsmenge $E := \left\{k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \,|\, \frac{2}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$, dann gilt offenbar $E = \{-2, -1, 1, 2\}$. Die Menge D besteht nun genau aus den Zahlen $\frac{1}{3k}, k \in E$, also ist $D = \left\{-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$.

Aufgabe 3

Für die Mengen $A = \{2, 3, 5, 8, 10\}$ und $B = \{-2, 0, 3, 5, 10\}$ bestimmen Sie die Mengen

- $A \cap B = \{3, 5, 10\}$
- $A \cup B = \{-2, 0, 2, 3, 5, 8, 10\}$
- $A\backslash B = \{2, 8\}$
- $B\backslash A = \{-2, 0\}$
- $A \times B$ besteht aus 25 Elementen, die der geneigte Leser mal schön selber hinschreiben kann...
- $B \cap \mathbb{N} = \{3, 5, 10\}$
- $B \cap \mathbb{N}_0 = \{0, 3, 5, 10\}$
- $B \cap \mathbb{Z} = B$
- $B\backslash\mathbb{N} = \{-2, 0\}$

Aufgabe 4

a) Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann eine Quadratzahl, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = k^2$, die gesuchte Menge läßt sich also schreiben als $Q := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, n = k^2\}$.

b) Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Forderung „höchstens drei“ zu formulieren; eine sieht so aus: Definiere $Q_0 := Q \cup \{0\}$, dann läßt sich die gesuchte Menge schreiben als

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, a, b, c \in Q_0 \,:\, n = a + b + c\}.$$

Zum Zusatz: Da beide Mengen unendlich sind, können Sie *nicht* in aufzählender Darstellung notiert werden!

Aufgabe 5

Diese Aufgabe soll deutlich machen, daß die Reihenfolge der Quantoren wichtig ist und durch das Vertauschen i.A. eine andere Aussage entsteht. Zunächst zur Aussage $\big(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big)$: Sei $x \in X$. Setze $y := -x$, dann ist $y \in \mathbb{Z}$ das additive *inverse Element zu x*, dessen Existenz die Lösbarkeit von Gleichungen der Form $a+x = b$ in $\mathbb{Z}$ garantiert (Näheres im weiteren Studium). Insbesondere ist diese Aussage wahr. Die Negierung der Aussage ist

$$\neg\big(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big) \;=\!\!|\!\!\models\; \big(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0\big)$$

und folglich falsch.

Die Aussage $\big(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big)$ ist falsch. Das sieht man, in dem man zeigt, daß ihre Negation wahr ist: Es gilt

$$\neg\big(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big) \;=\!\!|\!\!\models\; \big(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0\big).$$

Wir müssen also für alle x aus $\mathbb{Z}$ ein y aus $\mathbb{Z}$ finden so, daß $x + y \neq 0$ ist. Sei dazu $x \in \mathbb{Z}$. Setze $y := x^2+x+2$, dann ist $y \in \mathbb{Z}$, und es gilt $x+y = x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1$, also insbesondere $x + y \neq 0$.

Aufgabe 6

a) $\dfrac{64}{24} = \dfrac{8}{3}$,

b) $\dfrac{63a^2b}{14ab^2} = \dfrac{9a}{2b}$, definiert für $a, b \neq 0$,

c) $\dfrac{3(x^2 - y^2)}{6y - 6x} = \dfrac{3(x - y)(x + y)}{2 \cdot 3(y - x)} = -\dfrac{x + y}{2}$, definiert für $x \neq y$,

d) $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{3a - 3b} = \dfrac{(a - b)^2}{3(a - b)} = \dfrac{a - b}{3}$, definiert für $a \neq b$,

e) $\dfrac{63a^2b^2 - 9ab}{18ab + 27a^2b^2} = \dfrac{9ab(7ab - 1)}{9ab(2 + 3ab)} = \dfrac{7ab - 1}{3ab + 2}$, definiert für $ab \notin \{0, -\frac{2}{3}\}$,

f) $\dfrac{1 + \frac{1-n}{n(n+3)}}{n+1} = \dfrac{\frac{n^2+3n+(1-n)}{n(n+3)}}{n+1} = \dfrac{(n + 1)^2}{n(n + 1)(n + 3)} = \dfrac{n + 1}{n(n + 3)}$, definiert für $n \notin \{0, -1, -3\}$,

g) $\dfrac{q^3 - 1}{q - 1} = \dfrac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = q^2 + q + 1$, definiert für $q \neq 1$,

h) $\dfrac{\frac{a}{1-a} + \frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a} - \frac{a}{a+1}} = \dfrac{\frac{a^2+(1-a^2)}{a(1-a)}}{\frac{a^2-1-a^2}{a(a+1)}} = \dfrac{1}{a(1 - a)} \cdot \dfrac{a(a + 1)}{-1} = \dfrac{a + 1}{a - 1}$, definiert für $a \notin \{-1, 0, 1\}$

(beachten Sie, daß dann tatsächlich auch der Nenner im ersten Bruch ungleich 0 ist).

Aufgabe 7

a) $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{30 + 15 - 10 + 6 - 5 + 2}{30} = \dfrac{38}{30} = \dfrac{19}{15}$,

b) $\dfrac{1 + \frac{2}{3}}{2 - \frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{25}{18}$,

c) $\dfrac{10}{7} \cdot \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{28}{3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 28}{2 \cdot 3 \cdot 7} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$,

d) $\dfrac{x}{-x - 2y} + \dfrac{y}{x + 2y} = \dfrac{-x}{x + 2y} + \dfrac{y}{x + 2y} = \dfrac{y - x}{x + 2y}$, definiert für $x \neq 2y$

e) $\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{1} = 2$,

f) $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} : \dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{a^2 + b^2}{(a - b)(a + b)} \cdot \dfrac{a - b}{a + b} = \dfrac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}$, definiert für $|a| \neq |b|$

g) $\dfrac{3a}{6ab} - \dfrac{7b}{3a} + \dfrac{2ab}{4} = \dfrac{3a - 14b^2 + 3a^2b^2}{6ab}$, definiert für $a, b \neq 0$,

h) $\dfrac{x(1 - x)}{\sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 - x^2} = \dfrac{x(1 - x)}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{x - x^2 - (1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

definiert für $|x| < 1$. Eine mögliche weitere Umformung an dieser Stelle ist

$$\cdots = \frac{-\sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{1 + x}} = -\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

Aufgabe 8

a) $2^{-4} = \frac{1}{16}$, b) $(3^6)^{\frac{1}{12}} = \sqrt{3}$, c) $3^{10} \cdot 3^{-8} = 9$,

d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2 = 2^{\frac{11}{4}}$, e) $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$, f) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$,

g) $\sqrt{\sqrt{125}} = 5^{\frac{3}{4}}$, h) $\left(\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}\sqrt{8b}}\right)^4 = 4\sqrt[3]{ab^2}$, i) $\dfrac{\sqrt[3]{x^5y^4}}{\sqrt[4]{16x^2y^{-6}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[6]{x^7y^{17}}$,

j) $\sqrt[8]{a^2b \cdot \sqrt[4]{b^{12}}} = a^{\frac{1}{4}}\, b^{\frac{1}{2}}$, k) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$, l) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$.

Aufgabe 9

a) Vor.: $a \neq 0$; $\dfrac{\sqrt[5]{a^3}}{a^2}$ b) Vor.: $a \neq 0$; $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ c) Vor.: $b > 0$, $c \neq 0$; $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$

d) $17 + 12\sqrt{2}$ e) $\dfrac{18+5\sqrt{10}}{2}$ f) $2-\sqrt{3}$

g) $5+2\sqrt{6}$ h) $5(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{30})$ i) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 10

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x.

a) $x = 6$ b) $x = 1$ c) $x = 4$ d) $x = -3$

e) $x = -1$ f) $x = -2$ g) $x = -3$ h) $x = 2/3$

i) $x = 3$ j) $x = 3$ k) $x = 2$ l) $x = 1/2$

m) $x = 16$ n) $x = 2$ o) $x = 5$ p) $x = 10$

q) $x = 2$ r) $x = 0$ s) $x = 1/3$ t) $x = 2$

u) $x = 6$ v) $x = 0$ w) $x = 2/3$ x) $x = -1/2$

y) $x = 81$ z) $x = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Und noch ein paar!

a) $x = 1$ b) $x = 32$ c) $x = \sqrt[3]{e}$ d) $x = 1/25$

Aufgabe 11

a) $a > 0, b > 0, c > 0$
$2\ln(a) + 3\ln(b) - \ln(c)$

b) $a > |b|$
$\ln(a+b) + \ln(a-b)$

c) a, b nicht beide 0,
also $(a,b) \neq (0,0)$
Logarithmengesetze nicht anwendbar

d) $a > -b$
$2\ln(a+b)$

e) $a > 0, b > 0$
$2(\ln(a) + \ln(b))$

f) $a > 0, b > 0$
$\ln(a) + \ln(b) - \ln(a+b)$

g) $a > |b|$
$\ln(a^2+b^2) - \ln(a+b) - \ln(a-b)$

h) $a > b > 0$
$2(\ln(a) + \ln(b) - \ln(a-b))$

i) $a, b > 0$
$-(\frac{1}{2}\ln(a) + \ln(b))$

j) $a, b > 0$
$\frac{5}{4}(3\ln(a) - \ln(b))$

k) $a, b > 0$
$2(\ln(b) - \ln(a))$

l) $a, b, c > 0$
$\ln\left(8ab^2c^2\right)$

m) $a, b > 0$
$\ln\left(\frac{a^2}{b^4}\right)$

n) $a, b, c > 0$
$\ln\left(\frac{c^2}{b}\right)$

o) $a, b, c, d > 0$
$\ln\left(\frac{\sqrt[3]{a}\,bd}{c^2}\right)$

p) $a+b>0$

$\ln\left(\sqrt{a^3+b^3}\right)$

q) $a,b>0$

$\ln\left(\frac{1}{a^3\sqrt[3]{b}}\right)$

r) $a>b, ab>0$. Die zweite Bedingung ist gleichbedeutend mit: $a\neq 0, b\neq 0$, und a,b haben gleiches Vorzeichen

$\ln\left(\frac{a}{a-b}\right)^2$

Anmerkung. In den obigen Lösungen wurden die Gültigkeitsbereiche so gewählt, daß die Umformungen entsprechend stimmen, und alle Ausdrücke Sinn ergeben. Der Einfachheit halber wurde dabei meist $a,b,c,d>0$ gefordert, so daß die Umformungen entsprechend einfacher wurden. Tatsächlich handelt es sich dabei aber meistens nicht um die *maximal* möglichen Gültigkeitsbereiche: z.B. könnte man in Aufgabe a) auch nur fordern, daß $a\neq 0$ und $b\cdot c>0$ ist. In dem Fall ist auch

$$\frac{a^2b^3}{c} = a^2b^2\cdot\frac{b}{c} = |a|^2|b|^2\cdot\frac{|b|}{|c|} = \frac{|a|^2|b|^3}{|c|} > 0,$$

also ist $\ln\frac{a^2b^3}{c}$ wohldefiniert, und es gilt $\ln\left(\frac{a^2b^3}{c}\right) = \ln\left(\frac{|a|^2|b|^3}{|c|}\right) = 2\ln(|a|)+3\ln(|b|)-\ln(|c|)$.

Ähnlich kann man auch in anderen Aufgabenteilen verfahren.

Aufgabe 12

Die richtigen Antworten sind:

a) $10^{12}\cdot 2\cdot 10^5 =$

$\otimes$ $200\cdot 10^{15}$ $\otimes$ $20\cdot 10^{16}$ ☐ 20^{17} $\otimes$ $2\cdot 10^{17}$ ☐ 200^{60}

b) Setzt man in den Term $-x^2$ die Zahl 3 ein, so erhält man den Wert...

☐ -6 ☐ 9 ☐ 6 $\otimes$ -9

c) Setzt man in den Term $5x^2$ die Zahl -2 ein, so erhält man den Wert...

$\otimes$ 20 ☐ -20 ☐ 100 ☐ -100

d) Produkte von Potenzen mit gleicher Basis können zusammengefasst werden, indem man die Exponenten multipliziert.

☐ Ja $\otimes$ Nein

e) Produkte von Potenzen mit gleichen Exponenten können zusammengefasst werden, indem man die Basen multipliziert.

$\otimes$ Ja ☐ Nein

f) Der Term x^{-2} kann auch geschrieben werden als...

☐ $-\frac{1}{x^2}$ ☐ $\frac{1}{x^{-2}}$ ☐ $\frac{2}{x}$ ☐ $-\frac{1}{x^{-2}}$ $\otimes$ $\frac{1}{x^2}$ ☐ keine dieser Lösungen

g) Der Term $\frac{-x}{y}$ ist gleich...

$\otimes$ $\frac{x}{-y}$ ☐ $\frac{x}{y}$ ☐ $\frac{-x}{-y}$ $\otimes$ $-\frac{-x}{-y}$ $\otimes$ $-\frac{x}{y}$ $\otimes$ $-xy^{-1}$

h) Für alle positiven Zahlen gilt $\ln(\frac{x}{y}) = ...$

$\otimes$ $\ln(x)+\ln(y^{-1})$ ☐ $\ln(x)+\ln(y)$ ☐ $\frac{\ln(x)}{\ln(y)}$ $\otimes$ $\ln(x)-\ln(y)$ ☐ $\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Aufgabe 13
Der vereinfachte Term ist $\frac{3}{2x-1}$, definiert ist das für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Aufgabe 14

a)	$\mathbb{L} = \{-3, 2\}$	b)	$\mathbb{L} = \{-5, 8\}$	c)	$\mathbb{L} = \{-4, \frac{1}{2}\}$
d)	$\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$	e)	$\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}, 1\}$	f)	$\mathbb{L} = \{-6, -\frac{1}{3}, 3\}$
g)	$\mathbb{L} = \{-2, -\frac{1}{2}, 4, 5\}$	h)	$\mathbb{L} = \{-2, -1, 3\}$		

Aufgabe 15

a) -2, 3, -5

b) 0, 5, $-\frac{5}{2}$

c) 0, 1, $\frac{2}{3}$

d) ± 2, ± 1

e) 3

f) -1 (und 1, die schon gegeben ist)

g) $\frac{5}{2}$

h) 1

i) $\ln(3)$

j) 0

k) -1, $-\sqrt[3]{3}$

l) 2, 4

m) -2; 6

n) 2; 18

Aufgabe 16
Zu zeigen: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 - ab + b^2 \geq 0$, und im Fall $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt $a^2 - ab + b^2 > 0$.

Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$a^2 - ab + b^2 = \underbrace{\frac{1}{2}(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{a^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{b^2}{2}}_{\geq 0} \geq 0.$$

ZUSATZ (nicht in der Aufgabe): Gelte nun zusätzlich $(a, b) \neq (0, 0)$, dann ist $a^2 + b^2 > 0$, also auch $a^2 - ab + b^2 \geq \dfrac{a^2 + b^2}{2} > 0$.

Alternative Lösung: Folgende Lösung ist da schon etwas umständlicher, aber auch möglich:

Wir verwenden die zwei binomischen Formeln und die Tatsache, daß $(a \pm b)^2 \geq 0$ gilt. Daraus erhalten wir, daß sowohl $a^2 + b^2 \geq 2ab$ $(*)$als auch $a^2 + b^2 \geq -2ab$ $(**)$gilt. Im Falle $ab \geq 0$ verwenden wir $(*)$, andernfalls $(**)$ und erhalten:

$$a^2 + b^2 \geq |2ab| \geq |ab| \geq ab\,.$$

Weitere Überlegungen zeigen:

Sind a, b beide ungleich 0, so gilt $>$ anstelle des zweiten $\geq$. Ist entweder a oder b gleich 0, aber nicht beide, so gilt $>$ anstelle des ersten $\geq$.

Zusammengefaßt gilt also, falls a, b nicht beide Null sind: $a^2 - ab + b^2 > 0$, sonst trivialerweise $a^2 - ab + b^2 = 0$.

Aufgabe 17

Es handelt sich in allen Fällen um auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Ungleichungen, es gilt also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, und wir nehmen für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige äquivalente Umformungen der ursprünglichen Ungleichung vor.

a)
$$\begin{array}{rrcl} & 4x+3 & \leq & 2(x-6) \\ \Leftrightarrow & 4x+3 & \leq & 2x-12 \\ \Leftrightarrow & 2x & \leq & -12-3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & -\frac{15}{2} \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right]$.

b)
$$\begin{array}{rrcl} & \frac{x-1}{2} & \geq & \frac{1-x}{3} \\ \Leftrightarrow & x-1 & \geq & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow & \frac{5}{3}x & \geq & \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 1 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = [1, \infty)$

c)
$$\begin{array}{rrl} & 4(1-x)+3(x+2) & < 8 \\ \Leftrightarrow & -4x+3x & < 8-4-6 \\ \Leftrightarrow & -x & < -2 \\ \Leftrightarrow & x & > 2 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = (2, \infty)$.

d)
$$\begin{array}{rrl} & 3x-1 & \leq 2(x-3)-(2-x) \\ \Leftrightarrow & 3x-2x-x & \leq 1-6-2 \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq -7 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

e)
$$\begin{array}{rrl} & 9x & \geq \frac{3(6x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & 9x-9x & \geq -3/2 \\ \Leftrightarrow & 0 & \geq -3/2 \end{array}$$

Dies ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

f)
$$\begin{array}{rrl} & -7x & \geq \frac{3(x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & -14x-3x & \geq -3 \\ \Leftrightarrow & -17x & \geq -3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq \frac{3}{17} \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{3}{17}\right]$.

Aufgabe 18

a)
$$\begin{array}{rrl} & 3^{-\frac{1}{2}} & < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow & 1 & < (1/2)^{1/2} \cdot 3^{1/2} \\ \Leftrightarrow & 1 & < (3/2)^{1/2} \end{array}$$

Die Ungleichung ist erfüllt, da $3/2 > 1$ und damit auch $(3/2)^{1/2} > 1$ gilt.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$$\begin{array}{rrl} & (1+a)^2 & \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & 1+2a+a^2 & \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & a^2 & \leq 0, \end{array}$$
und dies ist genau dann erfüllt, wenn $a = 0$.

c) Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:
$$\begin{array}{rrll} & a^2 & > 2, & a \in \mathbb{Z} \ , \\ \Leftrightarrow & |a| & > \sqrt{2} & a \in \mathbb{Z} \end{array}$$
und dies ist wegen $a \in \mathbb{Z}$ genau dann erfüllt, wenn $|a| \geq 2$ ist, also wenn $a \in \mathbb{Z} \backslash -1, 0, 1$ gilt.

d) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Dann gilt:
$$\begin{array}{rrl} & \left(\frac{1+a}{a}\right) & > \left(\frac{a}{a-1}\right) \qquad \text{(Beachte: wegen } a > 1 \text{ sind beide Nenner positiv)} \\ \Leftrightarrow & (1+a)(a-1) & > a^2 \\ \Leftrightarrow & a^2-1 & > a^2 \\ \Leftrightarrow & -1 & > 0, \end{array}$$
was eine falsche Aussage ist. Also ist auch die ursprüngliche Ungleichung falsch, sie wird also für kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ erfüllt.

Aufgabe 19

Für $x = 0$ ist die Ungleichung nicht definiert und für $x < 0$ offensichtlich nicht erfüllt. Sei also $x > 0$. Dann gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geq 10 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 \geq 0$$

Dem entspricht eine nach oben geöffnete Parabel. Quadratisches Ergänzen liefert die Nullstellen $5 + 2\sqrt{6}$ und $5 - 2\sqrt{6}$. Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung erfüllt ist, ist somit gleich $(0, 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}, \infty)$.