Vorkurs Mathematik: Aufgaben zu Aussagen und Mengen

Aufgabe 1

Finden Sie Beispiele für die Verknüpfung von Aussagen, indem Sie die Aussage $\mathcal{A}$:=„Heute ist Montag.“ mit Aussagen aus der folgenden Liste mithilfe von Junktoren ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) so verknüpfen, daß Sie mindestens vier weitere wahre Aussagen erhalten:

$\mathcal{B}$:=„Heute ist Dienstag.“	$\mathcal{E}$:=„Gestern war Sonntag.“
$\mathcal{C}$:=„Heute ist kein Montag.“	$\mathcal{F}$:=„Heute ist Werktag.“
$\mathcal{D}$:=„Gestern war kein Montag.“	$\mathcal{G}$:=„Gestern war Wochenende.

Beispiel: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{F}$.

Können Sie aus den Aussagen $\mathcal{B} - \mathcal{G}$ durch Verknüpfung weitere wahre Aussagen erzeugen?

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie die folgende Mengen in der beschreibenden Darstellung:

$$A := \{ \text{ Nord, West, Süd, Ost } \},$$
$$B := \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}.$$

b) Schreiben Sie die folgenden Mengen in der aufzählenden Darstellung:

$$C := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ n = k^2 \text{ und } -7 \leq k \leq 7\},$$
$$D := \{q \,|\, \exists\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} :\ q = \tfrac{1}{3k} \text{ und } \tfrac{2}{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 3

Für die Mengen $A = \{2, 3, 5, 8, 10\}$ und $B = \{-2, 0, 3, 5, 10\}$ bestimmen Sie die Mengen

$$A \cap B, A \cup B, A\backslash B, B\backslash A, A \times B, B \cap \mathbb{N}, B \cap \mathbb{N}_0, B \cap \mathbb{Z}, B\backslash\mathbb{N}.$$

Aufgabe 4

a) Notieren Sie die Menge aller Quadrate in den natürlichen Zahlen in beschreibender Darstellung.

b) Notieren Sie die Menge aller natürlichen Zahlen, die sich als Summe von höchstens drei Quadraten schreiben lassen in beschreibender Darstellung.

Ist es möglich, eine der Mengen aus a) oder b) auch in aufzählender Darstellung zu notieren?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0,$$
$$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0.$$

Was bedeuten sie und welche dieser Aussagen ist wahr?

Aufgabe 6

Kürzen Sie die folgenden Brüche (**ohne** Zuhilfenahme elektronischer Hilfsmittel). Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

a) $\dfrac{64}{24}$,

b) $\dfrac{63a^2b}{14ab^2}$,

c) $\dfrac{3(x^2-y^2)}{6y-6x}$,

d) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{3a-3b}$,

e) $\dfrac{63a^2b^2-9ab}{18ab+27a^2b^2}$,

f) $\dfrac{1+\frac{1-n}{n(n+3)}}{n+1}$,

g) $\dfrac{q^3-1}{q-1}$,

h) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Brüche (**ohne** Zuhilfenahme elektronischer Hilfsmittel), und kürzen Sie dann so weit wie möglich. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

a) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{15}$,

b) $\dfrac{1+\frac{2}{3}}{2-\frac{4}{5}}$,

c) $\dfrac{10}{7}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{28}{3}$,

d) $\dfrac{x}{-x-2y}+\dfrac{y}{x+2y}$,

e) $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{4}$,

f) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\dfrac{a+b}{a-b}$,

g) $\dfrac{3a}{6ab}-\dfrac{7b}{3a}+\dfrac{2ab}{4}$,

h) $\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}$.

Aufgabe 8

Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

a) 2^{-4}, b) $(3^6)^{\frac{1}{12}}$, c) $3^{10} \cdot 3^{-8}$, d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2$,

e) $(-\frac{1}{3})^3$, f) $(-32)^{\frac{1}{5}}$, g) $\sqrt{\sqrt{125}}$, h) $\left(\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}\sqrt{8b}}\right)^4$,

i) $\dfrac{\sqrt[3]{x^5y^4}}{\sqrt[4]{16x^2y^{-6}}}$, j) $\sqrt[8]{a^2b \cdot \sqrt[4]{b^{12}}}$, k) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, l) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Aufgabe 9

Machen Sie die Nenner der folgenden Brüche rational. Geben Sie Bedingungen an die Parameter an, damit die Ausdrücke definiert sind.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^7}}, \quad a \neq 0$, b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$ c) $\dfrac{ab}{c\sqrt{b}}$,

d) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$, e) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$, f) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$,

g) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$, h) $\dfrac{60}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, i) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Aufgabe 10

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x.

a) $2^x = 64$ b) $64^x = 64$, c) $3^x = 81$, d) $2^x = \frac{1}{8}$,

e) $3^x = \frac{1}{3}$, f) $10^x = 0,01$, g) $5^x = 0,008$, h) $8^x = 4$,

i) $\log_x(9) = 2$, j) $\log_x(243) = 5$, k) $\log_x(1024) = 10$, l) $\log_x\left(\frac{1}{16}\right) = 4$,

m) $\log_x(4) = \frac{1}{2}$, n) $\log_x\left(\frac{1}{32}\right) = -5$, o) $\log_x\left(\frac{1}{5}\right) = -1$, p) $\log_x(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$,

q) $\log_(749) = x$, r) $\log_5(1) = x$, s) $\log_7\left(\sqrt[6]{49}\right) = x$, t) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = x$,

u) $\log_{10}\left(10^6\right) = x$, v) $\log_{10}(1) = x$, w) $\log_{10}\left(\sqrt[3]{100}\right) = x$, x) $\log_{10}\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right) = x$,

y) $\log_3(x) = 4$, z) $\log_{10}(x) = -3$.

Und noch ein paar!

a) $\log_{10}(x) = 0$, b) $\log_{\frac{1}{2}}(x) = -5$, c) $\log_e(x) = \frac{1}{3}$, d) $\log_5(x) = -2$.

Aufgabe 11

Wenden Sie die Potenz- und Logarithmengesetze an um die folgenden Terme umzuformen, und legen Sie jeweils den Gültigkeitsbereich von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fest.

a) $\ln\left(\dfrac{a^2b^3}{c}\right)$, b) $\ln(a^2-b^2)$, c) $\ln(a^2+b^2)$,

d) $\ln(a+b)^2$, e) $\ln(a^2b^2)$, f) $\ln\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)$,

g) $\ln\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$, h) $\ln\left(\dfrac{a^2b^2}{(a-b)^2}\right)$, i) $\ln\left(\dfrac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}\right)$.

j) $\ln\left(\dfrac{a^3}{b}\right)^{\frac{5}{4}}$, k) $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) - \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$,

l) $\ln(2a) + 2\ln(b) + 2\ln(2c)$, m) $2\ln a - 4\ln b$,

n) $\dfrac{1}{2}\ln(a) + 2\ln(c) - \dfrac{1}{3}(\ln(b^3) + \ln(a^{\frac{3}{2}}))$, o) $\dfrac{1}{3}(\ln(a) + 3\ln(b)) - \dfrac{1}{2}(4\ln(c) - 2\ln(d))$,

p) $\dfrac{1}{2}\ln(a^2-ab+b^2)+\dfrac{1}{2}\ln(a+b)$,

q) $-3\ln(a)-\dfrac{1}{3}\ln(b)$,

r) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)+\ln(ab)-2\ln(a-b)$.

Aufgabe 12

Beantworten Sie folgende Fragen durch Kreuze. Es können bei einer Frage durchaus auch mehrere Antworten richtig (bzw. falsch) sein.

a) $10^{12}\cdot 2\cdot 10^5 =$

☐ $200\cdot 10^{15}$ ☐ $20\cdot 10^{16}$ ☐ 20^{17} ☐ $2\cdot 10^{17}$ ☐ 200^{60}

b) Setzt man in den Term $-x^2$ die Zahl 3 ein, so erhält man den Wert...

☐ -6 ☐ 9 ☐ 6 ☐ -9

c) Setzt man in den Term $5x^2$ die Zahl -2 ein, so erhält man den Wert...

☐ 20 ☐ -20 ☐ 100 ☐ -100

d) Produkte von Potenzen mit gleicher Basis können zusammengefasst werden, indem man die Exponenten multipliziert.

☐ Ja ☐ Nein

e) Produkte von Potenzen mit gleichen Exponenten können zusammengefasst werden, indem man die Basen multipliziert.

☐ Ja ☐ Nein

f) Der Term x^{-2} kann auch geschrieben werden als...

☐ $-\dfrac{1}{x^2}$ ☐ $\dfrac{1}{x^{-2}}$ ☐ $\dfrac{2}{x}$ ☐ $-\dfrac{1}{x^{-2}}$ ☐ $\dfrac{1}{x^2}$ ☐ keine dieser Lösungen

g) Der Term $\frac{-x}{y}$ ist gleich...

☐ $\dfrac{x}{-y}$ ☐ $\dfrac{x}{y}$ ☐ $\dfrac{-x}{-y}$ ☐ $-\dfrac{-x}{-y}$ ☐ $-\dfrac{x}{y}$ ☐ $-xy^{-1}$

h) Für alle positiven Zahlen gilt $\ln(\frac{x}{y}) = ...$

☐ $\ln(x)+\ln(y^{-1})$ ☐ $\ln(x)+\ln(y)$ ☐ $\dfrac{\ln(x)}{\ln(y)}$ ☐ $\ln(x)-\ln(y)$ ☐ $\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Aufgabe 13

Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\frac{1+x^{-1}}{x-\frac{1}{1-(1-x^{-1})^{-1}}}+x^{-1}$$

soweit wie möglich. Für welche reellen Zahlen x ist der Ausdruck definiert?

Vorkurs Mathematik: Aufgaben zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 14

Finden Sie die Lösungsmenge für die Gleichungen.

a) $2x^2 + 2x = 12$

b) $2x(4x+10) = 14x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{7}\right) + 21x + 40$

c) $4x^2 + 14x - 8 = 0$

d) $-6x^4 + 18x^2 - 12 = 0$

e) $3x^2(4x^4 - 6x^2) - 3 = 21x^3 - 3x^3(4x^3 + 5x) - 3x^4$

f) $3x^3 + 10x^2 - 51x - 18 = 0$ mit $x_1 = 3$

g) $2x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 82x + 40 = 0$ mit $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$

h) $2x^3 - 14x - 12 = 0$ mit $x_1 = -1$

Aufgabe 15

Finden Sie die Lösungsmenge für die Gleichungen.

a) $0 = (x+2)(x-3)(x+5)$

b) $0 = 10x^2 - 4x^3 + 50x$

c) $0 = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2$

d) $0 = x^4 - 5x^2 + 4$

e) $0 = 17x^3 - 24x^2 - 25x - 168$ **Hinweis**: Eine Lösung ist $x = 3$

f) $0 = -x^3 - x^2 + x + 1$ **Hinweis**: Eine Lösung ist $x = 1$

g) $6^{2x-2} = 8 \cdot 3^{4x-7}$

h) $(2x-2)^2 - (4x+2)^2 = (8x+4)(2-4x) + 2(x+3)^2 - 44$

i) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

j) $5^x = 3^x$

k) $4x^6 + 16x^3 + 12 = 0$

l) $2^x + 64 \cdot 2^{-x} = 20$

m) $|2x-4| = 8$

n) $|x+2| + 4 = |2x-12|$

Aufgabe 16

Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ gilt.

Aufgabe 17

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $4x + 3 \leq 2(x-6)$,

b) $\frac{x-1}{2} \geq \frac{1-x}{3}$,

c) $4(1-x) + 3(x+2) < 8$,

d) $3x - 1 \leq 2(x-3) - (2-x)$,

e) $9x \geq \frac{3(6x-1)}{2}$,

f) $7x \leq \frac{3(x-1)}{-2}$.

Aufgabe 18

Welche Ungleichungen sind richtig/falsch, bzw. für welche Werte a sind sie erfüllt?

a) $3^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

b) $(1+a)^2 \leq 1 + 2a, \quad a \in \mathbb{R}$,

c) $a^2 > 2, \quad a \in \mathbb{Z}$,

d) $\left(\frac{1+a}{a}\right) > \left(\frac{a}{a-1}\right), \quad a \in \mathbb{R}, a > 1$.

Aufgabe 19

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $x + x^{-1} \geq 10$?