Vorkurs Mathematik: Aufgaben zu Aussagen und Mengen

Aufgabe 1

Finden Sie Beispiele für die Verknüpfung von Aussagen, indem Sie die Aussage $\mathcal{A}$:=„Heute ist Montag.“ mit Aussagen aus der folgenden Liste mithilfe von Junktoren ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) so verknüpfen, daß Sie mindestens vier weitere wahre Aussagen erhalten:

$\mathcal{B}$:=„Heute ist Dienstag.“

$\mathcal{C}$:=„Heute ist kein Montag.“

$\mathcal{D}$:=„Gestern war kein Montag.“

$\mathcal{E}$:=„Gestern war Sonntag.“

$\mathcal{F}$:=„Heute ist Werktag.“

$\mathcal{G}$:=„Gestern war Wochenende.

Beispiel: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{F}$.

Können Sie aus den Aussagen $\mathcal{B} - \mathcal{G}$ durch Verknüpfung weitere wahre Aussagen erzeugen?

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie die folgende Mengen in der beschreibenden Darstellung:

$$A := \{\text{ Nord, West, Süd, Ost }\},$$
$$B := \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}.$$

b) Schreiben Sie die folgenden Mengen in der aufzählenden Darstellung:

$$C := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{Z} : \; n = k^2 \text{ und } -7 \leq k \leq 7\},$$
$$D := \{q \,|\, \exists\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : \; q = \tfrac{1}{3k} \text{ und } \tfrac{2}{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 3

Für die Mengen $A = \{2, 3, 5, 8, 10\}$ und $B = \{-2, 0, 3, 5, 10\}$ bestimmen Sie die Mengen

$$A \cap B, A \cup B, A\backslash B, B\backslash A, A \times B, B \cap \mathbb{N}, B \cap \mathbb{N}_0, B \cap \mathbb{Z}, B\backslash\mathbb{N}.$$

Aufgabe 4

a) Notieren Sie die Menge aller Quadrate in den natürlichen Zahlen in beschreibender Darstellung.

b) Notieren Sie die Menge aller natürlichen Zahlen, die sich als Summe von höchstens drei Quadraten schreiben lassen in beschreibender Darstellung.

Ist es möglich, eine der Mengen aus a) oder b) auch in aufzählender Darstellung zu notieren?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0,$$
$$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0.$$

Was bedeuten sie und welche dieser Aussagen ist wahr?

Aufgabe 6

Kürzen Sie die folgenden Brüche (**ohne** Zuhilfenahme elektronischer Hilfsmittel). Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

a) $\frac{64}{24}$,

b) $\frac{63a^2b}{14ab^2}$,

c) $\frac{3(x^2-y^2)}{6y-6x}$,

d) $\frac{a^2-2ab+b^2}{3a-3b}$,

e) $\frac{63a^2b^2-9ab}{18ab+27a^2b^2}$,

f) $\frac{1+\frac{1-n}{n(n+3)}}{n+1}$,

g) $\frac{q^3-1}{q-1}$,

h) $\frac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Brüche (**ohne** Zuhilfenahme elektronischer Hilfsmittel), und kürzen Sie dann so weit wie möglich. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

a) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}$,

b) $\frac{1+\frac{2}{3}}{2-\frac{4}{5}}$,

c) $\frac{10}{7}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{28}{3}$,

d) $\frac{x}{-x-2y}+\frac{y}{x+2y}$,

e) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$,

f) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\frac{a+b}{a-b}$,

g) $\frac{3a}{6ab}-\frac{7b}{3a}+\frac{2ab}{4}$,

h) $\frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}$.

Aufgabe 8

Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

a) 2^{-4}, b) $(3^6)^{\frac{1}{12}}$, c) $3^{10} \cdot 3^{-8}$, d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2$,

e) $(-\frac{1}{3})^3$, f) $(-32)^{\frac{1}{5}}$, g) $\sqrt{\sqrt{125}}$, h) $\left(\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}\sqrt{8b}}\right)^4$,

i) $\dfrac{\sqrt[3]{x^5y^4}}{\sqrt[4]{16x^2y^{-6}}}$, j) $\sqrt[8]{a^2b \cdot \sqrt[4]{b^{12}}}$, k) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, l) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Aufgabe 9

Machen Sie die Nenner der folgenden Brüche rational. Geben Sie Bedingungen an die Parameter an, damit die Ausdrücke definiert sind.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^7}}, \quad a \neq 0$, b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$ c) $\dfrac{ab}{c\sqrt{b}}$,

d) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$, e) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$, f) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$,

g) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$, h) $\dfrac{60}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, i) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Aufgabe 10

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x.

a) $2^x = 64$ b) $64^x = 64$, c) $3^x = 81$, d) $2^x = \frac{1}{8}$,

e) $3^x = \frac{1}{3}$, f) $10^x = 0,01$, g) $5^x = 0,008$, h) $8^x = 4$,

i) $\log_x(9) = 2$, j) $\log_x(243) = 5$, k) $\log_x(1024) = 10$, l) $\log_x\left(\frac{1}{16}\right) = 4$,

m) $\log_x(4) = \frac{1}{2}$, n) $\log_x\left(\frac{1}{32}\right) = -5$, o) $\log_x\left(\frac{1}{5}\right) = -1$, p) $\log_x(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$,

q) $\log_(749) = x$, r) $\log_5(1) = x$, s) $\log_7\left(\sqrt[6]{49}\right) = x$, t) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = x$,

u) $\log_{10}\left(10^6\right) = x$, v) $\log_{10}(1) = x$, w) $\log_{10}\left(\sqrt[3]{100}\right) = x$, x) $\log_{10}\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right) = x$,

y) $\log_3(x) = 4$, z) $\log_{10}(x) = -3$.

Und noch ein paar!

a) $\log_{10}(x) = 0$, b) $\log_{\frac{1}{2}}(x) = -5$, c) $\log_e(x) = \frac{1}{3}$, d) $\log_5(x) = -2$.

Aufgabe 11

Wenden Sie die Potenz- und Logarithmengesetze an um die folgenden Terme umzuformen, und legen Sie jeweils den Gültigkeitsbereich von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fest.

a) $\ln\left(\dfrac{a^2b^3}{c}\right)$, b) $\ln(a^2-b^2)$, c) $\ln(a^2+b^2)$,

d) $\ln(a+b)^2$, e) $\ln(a^2b^2)$, f) $\ln\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)$,

g) $\ln\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$, h) $\ln\left(\dfrac{a^2b^2}{(a-b)^2}\right)$, i) $\ln\left(\dfrac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}\right)$.

j) $\ln\left(\dfrac{a^3}{b}\right)^{\frac{5}{4}}$, k) $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) - \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$,

l) $\ln(2a) + 2\ln(b) + 2\ln(2c)$, m) $2\ln a - 4\ln b$,

n) $\dfrac{1}{2}\ln(a) + 2\ln(c) - \dfrac{1}{3}(\ln(b^3) + \ln(a^{\frac{3}{2}}))$, o) $\dfrac{1}{3}(\ln(a) + 3\ln(b)) - \dfrac{1}{2}(4\ln(c) - 2\ln(d))$,

p) $\frac{1}{2}\ln(a^2-ab+b^2)+\frac{1}{2}\ln(a+b)$,

q) $-3\ln(a)-\frac{1}{3}\ln(b)$,

r) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\ln(ab)-2\ln(a-b)$.

Aufgabe 12

Beantworten Sie folgende Fragen durch Kreuze. Es können bei einer Frage durchaus auch mehrere Antworten richtig (bzw. falsch) sein.

a) $10^{12}\cdot 2\cdot 10^5=$

☐ $200\cdot 10^{15}$ ☐ $20\cdot 10^{16}$ ☐ 20^{17} ☐ $2\cdot 10^{17}$ ☐ 200^{60}

b) Setzt man in den Term $-x^2$ die Zahl 3 ein, so erhält man den Wert...

☐ -6 ☐ 9 ☐ 6 ☐ -9

c) Setzt man in den Term $5x^2$ die Zahl -2 ein, so erhält man den Wert...

☐ 20 ☐ -20 ☐ 100 ☐ -100

d) Produkte von Potenzen mit gleicher Basis können zusammengefasst werden, indem man die Exponenten multipliziert.

☐ Ja ☐ Nein

e) Produkte von Potenzen mit gleichen Exponenten können zusammengefasst werden, indem man die Basen multipliziert.

☐ Ja ☐ Nein

f) Der Term x^{-2} kann auch geschrieben werden als...

☐ $-\frac{1}{x^2}$ ☐ $\frac{1}{x^{-2}}$ ☐ $\frac{2}{x}$ ☐ $-\frac{1}{x^{-2}}$ ☐ $\frac{1}{x^2}$ ☐ keine dieser Lösungen

g) Der Term $\frac{-x}{y}$ ist gleich...

☐ $\frac{x}{-y}$ ☐ $\frac{x}{y}$ ☐ $\frac{-x}{-y}$ ☐ $-\frac{-x}{-y}$ ☐ $-\frac{x}{y}$ ☐ $-xy^{-1}$

h) Für alle positiven Zahlen gilt $\ln(\frac{x}{y})=$ ...

☐ $\ln(x)+\ln(y^{-1})$ ☐ $\ln(x)+\ln(y)$ ☐ $\frac{\ln(x)}{\ln(y)}$ ☐ $\ln(x)-\ln(y)$ ☐ $\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Aufgabe 13

Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\frac{1+x^{-1}}{x-\frac{1}{1-(1-x^{-1})^{-1}}}+x^{-1}$$

soweit wie möglich. Für welche reellen Zahlen x ist der Ausdruck definiert?

Vorkurs Mathematik: Aufgaben zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

---

Aufgabe 14

Finden Sie die Lösungsmenge für die Gleichungen.

a) $2x^2 + 2x = 12$

b) $2x(4x + 10) = 14x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{7}\right) + 21x + 40$

c) $4x^2 + 14x - 8 = 0$

d) $-6x^4 + 18x^2 - 12 = 0$

e) $3x^2(4x^4 - 6x^2) - 3 = 21x^3 - 3x^3(4x^3 + 5x) - 3x^4$

f) $3x^3 + 10x^2 - 51x - 18 = 0$ mit $x_1 = 3$

g) $2x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 82x + 40 = 0$ mit $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$

h) $2x^3 - 14x - 12 = 0$ mit $x_1 = -1$

Aufgabe 15

Finden Sie die Lösungsmenge für die Gleichungen.

a) $0 = (x + 2)(x - 3)(x + 5)$

b) $0 = 10x^2 - 4x^3 + 50x$

c) $0 = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2$

d) $0 = x^4 - 5x^2 + 4$

e) $0 = 17x^3 - 24x^2 - 25x - 168$ **Hinweis**: Eine Lösung ist $x = 3$

f) $0 = -x^3 - x^2 + x + 1$ **Hinweis**: Eine Lösung ist $x = 1$

g) $6^{2x-2} = 8 \cdot 3^{4x-7}$

h) $(2x - 2)^2 - (4x + 2)^2 = (8x + 4)(2 - 4x) + 2(x + 3)^2 - 44$

i) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

j) $5^x = 3^x$

k) $4x^6 + 16x^3 + 12 = 0$

l) $2^x + 64 \cdot 2^{-x} = 20$

m) $|2x - 4| = 8$

n) $|x + 2| + 4 = |2x - 12|$

Aufgabe 16

Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ gilt.

Aufgabe 17

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $4x + 3 \leq 2(x - 6)$,

b) $\frac{x-1}{2} \geq \frac{1-x}{3}$,

c) $4(1 - x) + 3(x + 2) < 8$,

d) $3x - 1 \leq 2(x - 3) - (2 - x)$,

e) $9x \geq \frac{3(6x-1)}{2}$,

f) $7x \leq \frac{3(x-1)}{-2}$.

Aufgabe 18

Welche Ungleichungen sind richtig/falsch, bzw. für welche Werte a sind sie erfüllt?

a) $3^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

b) $(1 + a)^2 \leq 1 + 2a, \quad a \in \mathbb{R}$,

c) $a^2 > 2, \quad a \in \mathbb{Z}$,

d) $\left(\frac{1 + a}{a}\right) > \left(\frac{a}{a - 1}\right), \quad a \in \mathbb{R}, a > 1$.

Aufgabe 19

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $x + x^{-1} \geq 10$?

Vorkurs Mathematik: Aufgaben zur Kombinatorik

Aufgabe 20
Berechnen Sie ohne Zuhilfenahme von Hilfsmitteln

$$\textbf{a)}\quad 6! \quad \textbf{b)}\quad \sum_{j=1}^{6} 2j \quad \textbf{c)}\quad \sum_{k=1}^{3} k^3 \quad \textbf{d)}\quad \sum_{n=1}^{4} n! \quad \textbf{e)}\quad \sum_{k=4}^{6} (2k-1)^2 \quad \textbf{f)}\quad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k!} \quad \textbf{g)}\quad \binom{7}{3}$$

Aufgabe 21
Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gültig sind. Für die wahren geben Sie einen Beweis an, für die falschen ein konkretes Gegenbeispiel.

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$

b) $(n+m)! = n! + m!$

c) $(n \cdot m)! = n! \cdot m!$

d) $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$

Aufgabe 22
Bestimmen Sie die Anzahl der Tipps beim Lotto 6 aus 49, die Ihnen mindestens 4 Richtige liefern.

Aufgabe 23
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Türme so auf ein Schachbrett zu stellen, dass sie sich (paarweise) nicht bedrohen?

Aufgabe 24
Wieviele Möglichkeiten gibt es, 22 Spieler auf 2 Mannschaften aufzuteilen?

Aufgabe 25
An 100 Tagen im Jahr (365 Tage) regnet es nicht. An den anderen Tagen regnet es. Wieviele Wetterverläufe gibt es?

Aufgabe 26

a) Wieviele 5-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern $1, 2, 3, \ldots, 8$ bilden, wenn keine Ziffer doppelt vorkommen darf?

b) Wieviele 5-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern $1, 2, 3, \ldots, 8$ bilden, wenn jede Ziffer beliebig oft vorkommen darf?

Aufgabe 27
Ein Zeugnis hat 10 Noten; die möglichen Noten sind $1, 2, \ldots, 6$.

a) Wieviele mögliche Zeugnisse gibt es?

b) Wieviele mögliche Zeugnisse gibt es, wenn wir nicht zwischen den Fächern unterscheiden?

Aufgabe 28

Eine Münze wird 3 mal geworfen und liefert jedesmal Kopf (K) oder Zahl (Z). Die Menge der Elementarereigniss Ω besteht also aus Tripeln mit Einträgen aus $\{K, Z\}$. Sei A das Ereignis, dass beim ersten Wurf Z auftritt, B das Ereignis, dass beim zweiten Wurf Z auftritt und C das Ereignis, dass beim dritten Wurf Z auftritt.

a) Schreiben Sie die Ereignisse A, B, C, $A \cap B$, $A \cap B \cap C$ als Teilmengen von Ω und geben Sie ihre Wahrscheinlichkeiten an (wir machen die Annahme, dass alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind)

b) Sind A und B unabhängig? Gleiches für A und C bzw. für B und C.

c) Sind A, B und C unabhängig, gilt also $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$?

Aufgabe 29

Eine Krankheit breitet sich aus. 10% der Bevölkerung ist bereits erkrankt. Ein Test für diese Krankheit stellt bei Menschen, die tatsächlich erkrankt sind, die Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% fest. Leider signalisiert der Test auch bei 15% der Nicht-Erkrankten die Erkrankung. Eine zufällig ausgewählte Person führt den Test durch und dieser signalisiert die Krankheit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er tatsächlich krank? Stellen Sie eine Vier-Felder-Tafel auf, um die Frage zu beantworten.

Aufgabe 30

Einem Flugreisenden kann aus mehreren Gründen der Urlaub vermiest werden. Dass ein Flug stark verspätet ist (Ereignis A) kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 8% vor, dass ein Koffer verloren geht (Ereignis B), tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,002$ auf. Dass ein Flug weder verspätet ist noch dass ein Koffer verlorengeht, tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,919$ ein. Erstellen Sie eine Vier-Felder-Tafel und berechnen und interpretieren Sie dann folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cup B), P(A|B), P(B|A), P(A \backslash B), P(\overline{A} \cap B), P(B|\overline{A}).$$

Aufgabe 31

Wir würfeln mit 2 Würfeln. Sei X die Zufallsvariable, die jedem Ergebnis die Augensumme zuordnet. Bestimmen Sie für jede mögliche Augensumme die Wahrscheinlichkeit, mit der sie auftritt. Bestimmen Sie dann Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariablen X.

Aufgabe 32

Ein Medikament verursacht bei 2% aller Patienten gravierende Nebenwirkungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Versuch mit 50 Patienten, bei keinem (höchstens einem) Patienten Nebenwirkungen auftreten?

Aufgabe 33

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit $n = 20$ und $p = \frac{1}{4}$ berechnen Sie

$$P(X = 4), P(X < 2), P(X \leq 2), P(X \geq 18), P(3 \leq X < 7), P(3 < X \leq 7).$$

Skizzieren Sie (grob) die zugehörige Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion.