

Vorkurs Mathematik: Lösungsversuche

Aufgabe 1

Wahre Aussagen sind zum Beispiel:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{C}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{E}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F}, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{A}.$$

Weitere wahre Aussagen: $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F}, \dots$

Aufgabe 2

- a) Es ist $A = \{x \mid x \text{ ist eine Haupthimmelsrichtung}\}$. Die Menge B besteht offenbar aus den ungerade natürlichen Zahlen, die kleiner als 40 sind. Eine natürliche Zahl n ist genau dann ungerade, wenn sie von der Gestalt $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Dies ergibt:

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 40, \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}.$$

- b) Zur Menge C : In C liegen diejenigen Quadratzahlen $n = k^2 = (-k)^2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $|k| \leq 7$, also ist

$$C = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}.$$

Zur Menge D : Definiere die Hilfsmenge $E := \{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid \frac{2}{k} \in \mathbb{Z}\}$, dann gilt offenbar $E = \{-2, -1, 1, 2\}$. Die Menge D besteht nun genau aus den Zahlen $\frac{1}{3k}, k \in E$, also ist $D = \{-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$.

Aufgabe 3

Für die Mengen $A = \{2, 3, 5, 8, 10\}$ und $B = \{-2, 0, 3, 5, 10\}$ bestimmen Sie die Mengen

- $A \cap B = \{3, 5, 10\}$
- $A \cup B = \{-2, 0, 2, 3, 5, 8, 10\}$
- $A \setminus B = \{2, 8\}$
- $B \setminus A = \{-2, 0\}$
- $A \times B$ besteht aus 25 Elementen, die der geneigte Leser mal schön selber hinschreiben kann...
- $B \cap \mathbb{N} = \{3, 5, 10\}$
- $B \cap \mathbb{N}_0 = \{0, 3, 5, 10\}$
- $B \cap \mathbb{Z} = B$
- $B \setminus \mathbb{N} = \{-2, 0\}$

Aufgabe 4

- a) Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann eine Quadratzahl, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = k^2$, die gesuchte Menge läßt sich also schreiben als $Q := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = k^2\}$.
- b) Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Forderung „höchstens drei“ zu formulieren; eine sieht so aus: Definiere $Q_0 := Q \cup \{0\}$, dann läßt sich die gesuchte Menge schreiben als

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists a, b, c \in Q_0 : n = a + b + c\}.$$

Zum Zusatz: Da beide Mengen unendlich sind, können Sie *nicht* in aufzählender Darstellung notiert werden!

Aufgabe 5

Diese Aufgabe soll deutlich machen, daß die Reihenfolge der Quantoren wichtig ist und durch das Vertauschen i.A. eine andere Aussage entsteht. Zunächst zur Aussage $(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0)$: Sei $x \in \mathbb{Z}$. Setze $y := -x$, dann ist $y \in \mathbb{Z}$ das additive *inverse Element* zu x , dessen Existenz die Lösbarkeit von Gleichungen der Form $a + x = b$ in \mathbb{Z} garantiert (Näheres im weiteren Studium). Insbesondere ist diese Aussage wahr. Die Negierung der Aussage ist

$$\neg(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0) \equiv (\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0)$$

und folglich falsch.

Die Aussage $(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0)$ ist falsch. Das sieht man, in dem man zeigt, daß ihre Negation wahr ist: Es gilt

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0) \equiv (\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0).$$

Wir müssen also für alle x aus \mathbb{Z} ein y aus \mathbb{Z} finden so, daß $x + y \neq 0$ ist. Sei dazu $x \in \mathbb{Z}$. Setze $y := x^2 + x + 2$, dann ist $y \in \mathbb{Z}$, und es gilt $x + y = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1$, also insbesondere $x + y \neq 0$.

Aufgabe 6

a) $\frac{64}{24} = \frac{8}{3}$,

b) $\frac{63a^2b}{14ab^2} = \frac{9a}{2b}$, definiert für $a, b \neq 0$,

c) $\frac{3(x^2 - y^2)}{6y - 6x} = \frac{3(x - y)(x + y)}{2 \cdot 3(y - x)} = -\frac{x + y}{2}$,

d) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{3a - 3b} = \frac{(a - b)^2}{3(a - b)} = \frac{a - b}{3}$,

definiert für $x \neq y$,

definiert für $a \neq b$,

e) $\frac{63a^2b^2 - 9ab}{18ab + 27a^2b^2} = \frac{9ab(7ab - 1)}{9ab(2 + 3ab)} = \frac{7ab - 1}{3ab + 2}$, definiert für $ab \notin \{0, -\frac{2}{3}\}$,

f) $\frac{1 + \frac{1-n}{n(n+3)}}{n+1} = \frac{\frac{n^2+3n+(1-n)}{n(n+3)}}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+3)} = \frac{n+1}{n(n+3)}$, definiert für $n \notin \{0, -1, -3\}$,

g) $\frac{q^3 - 1}{q - 1} = \frac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = q^2 + q + 1$, definiert für $q \neq 1$,

h) $\frac{\frac{a}{1-a} + \frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a} - \frac{a}{a+1}} = \frac{\frac{a^2+(1-a^2)}{a(1-a)}}{\frac{a^2-1-a^2}{a(a+1)}} = \frac{1}{a(1-a)} \cdot \frac{a(a+1)}{-1} = \frac{a+1}{a-1}$, definiert für $a \notin \{-1, 0, 1\}$

(beachten Sie, daß dann tatsächlich auch der Nenner im ersten Bruch ungleich 0 ist).

Aufgabe 7

a) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{30 + 15 - 10 + 6 - 5 + 2}{30} = \frac{38}{30} = \frac{19}{15}$,

b) $\frac{1 + \frac{2}{3}}{2 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{6}{5}} = \frac{25}{18}$,

c) $\frac{10}{7} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{28}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 28}{2 \cdot 3 \cdot 7} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$,

d) $\frac{x}{-x - 2y} + \frac{y}{x + 2y} = \frac{-x}{x + 2y} + \frac{y}{x + 2y} = \frac{y - x}{x + 2y}$, definiert für $x \neq 2y$

e) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 2$,

f) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} : \frac{a + b}{a - b} = \frac{a^2 + b^2}{(a - b)(a + b)} \cdot \frac{a - b}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}$, definiert für $|a| \neq |b|$

g) $\frac{3a}{6ab} - \frac{7b}{3a} + \frac{2ab}{4} = \frac{3a - 14b^2 + 3a^2b^2}{6ab}$, definiert für $a, b \neq 0$,

h) $\frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} = \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x - x^2 - (1 - x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$,

definiert für $|x| < 1$. Eine mögliche weitere Umformung an dieser Stelle ist

$$\dots = \frac{-\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Aufgabe 8

- a) $2^{-4} = \frac{1}{16}$,
b) $(3^6)^{\frac{1}{12}} = \sqrt{3}$,
c) $3^{10} \cdot 3^{-8} = 9$,
d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2 = 2^{\frac{11}{4}}$,
e) $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$,
f) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$,
g) $\sqrt{\sqrt{125}} = 5^{\frac{3}{4}}$,
h) $\left(\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}} \sqrt{8b}}\right)^4 = 4 \sqrt[3]{ab^2}$,
i) $\frac{\sqrt[3]{x^5 y^4}}{\sqrt[4]{16x^2 y^{-6}}} = \frac{1}{2} \sqrt[6]{x^7 y^{17}}$,
j) $\sqrt[8]{a^2 b} \cdot \sqrt[4]{b^{12}} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}}$,
k) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$,
l) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

Aufgabe 9

- a) Vor.: $a \neq 0$; $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a^2}$
b) Vor.: $a \neq 0$; $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$
c) Vor.: $b > 0, c \neq 0$; $\frac{a\sqrt{b}}{c}$
d) $17 + 12\sqrt{2}$
e) $\frac{18 + 5\sqrt{10}}{2}$
f) $2 - \sqrt{3}$
g) $5 + 2\sqrt{6}$
h) $5(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{30})$
i) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 10

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x .

- a) $x = 6$ b) $x = 1$ c) $x = 4$ d) $x = -3$
e) $x = -1$ f) $x = -2$ g) $x = -3$ h) $x = 2/3$
i) $x = 3$ j) $x = 3$ k) $x = 2$ l) $x = 1/2$
m) $x = 16$ n) $x = 2$ o) $x = 5$ p) $x = 10$
q) $x = 2$ r) $x = 0$ s) $x = 1/3$ t) $x = 2$
u) $x = 6$ v) $x = 0$ w) $x = 2/3$ x) $x = -1/2$
y) $x = 81$ z) $x = \frac{1}{1000} = 0,001$

Und noch ein paar!

- a) $x = 1$ b) $x = 32$ c) $x = \sqrt[3]{e}$ d) $x = 1/25$

Aufgabe 11

- a) $a > 0, b > 0, c > 0$ b) $a > |b|$ c) a, b nicht beide 0,
 $2 \ln(a) + 3 \ln(b) - \ln(c)$ $\ln(a+b) + \ln(a-b)$ also $(a, b) \neq (0, 0)$
Logarithmengesetze nicht
anwendbar
d) $a > -b$ e) $a > 0, b > 0$ f) $a > 0, b > 0$
 $2 \ln(a+b)$ $2(\ln(a) + \ln(b))$ $\ln(a) + \ln(b) - \ln(a+b)$
g) $a > |b|$ h) $a > b > 0$ i) $a, b > 0$
 $\ln(a^2 + b^2) - \ln(a+b) -$ $2(\ln(a) + \ln(b) - \ln(a-b))$ $-(\frac{1}{2} \ln(a) + \ln(b))$
 $\ln(a-b)$
j) $a, b > 0$ k) $a, b > 0$
 $\frac{5}{4}(3 \ln(a) - \ln(b))$ $2(\ln(b) - \ln(a))$
l) $a, b, c > 0$ m) $a, b > 0$
 $\ln(8ab^2c^2)$ $\ln(\frac{a^2}{b^4})$
n) $a, b, c > 0$ o) $a, b, c, d > 0$
 $\ln(\frac{c^2}{b})$ $\ln(\frac{\sqrt[3]{a}bd}{c^2})$

p) $a + b > 0$

$\ln(\sqrt{a^3 + b^3})$

q) $a, b > 0$

$\ln\left(\frac{1}{a^3 \sqrt[3]{b}}\right)$

r) $a > b, ab > 0$. Die zweite Bedingung ist gleichbedeutend mit: $a \neq 0, b \neq 0$, und a, b haben gleiches Vorzeichen

$\ln\left(\frac{a}{a-b}\right)^2$

Anmerkung. In den obigen Lösungen wurden die Gültigkeitsbereiche so gewählt, daß die Umformungen entsprechend stimmen, und alle Ausdrücke Sinn ergeben. Der Einfachheit halber wurde dabei meist $a, b, c, d > 0$ gefordert, so daß die Umformungen entsprechend einfacher wurden. Tatsächlich handelt es sich dabei aber meistens nicht um die *maximal* möglichen Gültigkeitsbereiche: z.B. könnte man in Aufgabe a) auch nur fordern, daß $a \neq 0$ und $b \cdot c > 0$ ist. In dem Fall ist auch

$$\frac{a^2 b^3}{c} = a^2 b^2 \cdot \frac{b}{c} = |a|^2 |b|^2 \cdot \frac{|b|}{|c|} = \frac{|a|^2 |b|^3}{|c|} > 0,$$

also ist $\ln \frac{a^2 b^3}{c}$ wohldefiniert, und es gilt $\ln\left(\frac{a^2 b^3}{c}\right) = \ln\left(\frac{|a|^2 |b|^3}{|c|}\right) = 2 \ln(|a|) + 3 \ln(|b|) - \ln(|c|)$.

Ähnlich kann man auch in anderen Aufgabenteilen verfahren.

Aufgabe 12

Die richtigen Antworten sind:

a) $10^{12} \cdot 2 \cdot 10^5 =$

$200 \cdot 10^{15}$ $20 \cdot 10^{16}$ 20^{17} $2 \cdot 10^{17}$ 200^{60}

b) Setzt man in den Term $-x^2$ die Zahl 3 ein, so erhält man den Wert...

-6 9 6 -9

c) Setzt man in den Term $5x^2$ die Zahl -2 ein, so erhält man den Wert...

20 -20 100 -100

d) Produkte von Potenzen mit gleicher Basis können zusammengefasst werden, indem man die Exponenten multipliziert.

Ja Nein

e) Produkte von Potenzen mit gleichen Exponenten können zusammengefasst werden, indem man die Basen multipliziert.

Ja Nein

f) Der Term x^{-2} kann auch geschrieben werden als...

$-\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x^{-2}}$ $\frac{2}{x}$ $-\frac{1}{x^{-2}}$ $\frac{1}{x^2}$ keine dieser Lösungen

g) Der Term $\frac{-x}{y}$ ist gleich...

$\frac{x}{-y}$ $\frac{x}{y}$ $\frac{-x}{-y}$ $-\frac{-x}{-y}$ $-\frac{x}{y}$ $-xy^{-1}$

h) Für alle positiven Zahlen gilt $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \dots$

$\ln(x) + \ln(y^{-1})$ $\ln(x) + \ln(y)$ $\frac{\ln(x)}{\ln(y)}$ $\ln(x) - \ln(y)$ $\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Aufgabe 13

Der vereinfachte Term ist $\frac{3}{2x-1}$, definiert ist das für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Aufgabe 14

- a) $\mathbb{L} = \{-3, 2\}$ b) $\mathbb{L} = \{-5, 8\}$ c) $\mathbb{L} = \{-4, \frac{1}{2}\}$
d) $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$ e) $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}, 1\}$ f) $\mathbb{L} = \{-6, -\frac{1}{3}, 3\}$
g) $\mathbb{L} = \{-2, -\frac{1}{2}, 4, 5\}$ h) $\mathbb{L} = \{-2, -1, 3\}$

Aufgabe 15

- a) $-2, 3, -5$
b) $0, 5, -\frac{5}{2}$
c) $0, 1, \frac{2}{3}$
d) $\pm 2, \pm 1$
e) 3
f) -1 (und 1 , die schon gegeben ist)
g) $\frac{5}{2}$
h) 1
i) $\ln(3)$
j) 0
k) $-1, -\sqrt[3]{3}$
l) $2, 4$
m) $-2; 6$
n) $2; 18$

Aufgabe 16

Zu zeigen: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 - ab + b^2 \geq 0$, und im Fall $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt $a^2 - ab + b^2 > 0$.

Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$a^2 - ab + b^2 = \underbrace{\frac{1}{2}(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{a^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{b^2}{2}}_{\geq 0} \geq 0.$$

ZUSATZ (nicht in der Aufgabe): Gelte nun zusätzlich $(a, b) \neq (0, 0)$, dann ist $a^2 + b^2 > 0$, also auch $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{a^2 + b^2}{2} > 0$.

Alternative Lösung: Folgende Lösung ist da schon etwas umständlicher, aber auch möglich:

Wir verwenden die zwei binomischen Formeln und die Tatsache, daß $(a \pm b)^2 \geq 0$ gilt. Daraus erhalten wir, daß sowohl $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (*) als auch $a^2 + b^2 \geq -2ab$ (**) gilt. Im Falle $ab \geq 0$ verwenden wir (*), andernfalls (**) und erhalten:

$$a^2 + b^2 \geq |2ab| \geq |ab| \geq ab.$$

Weitere Überlegungen zeigen:

Sind a, b beide ungleich 0 , so gilt $>$ anstelle des zweiten \geq . Ist entweder a oder b gleich 0 , aber nicht beide, so gilt $>$ anstelle des ersten \geq .

Zusammengefaßt gilt also, falls a, b nicht beide Null sind: $a^2 - ab + b^2 > 0$, sonst trivialerweise $a^2 - ab + b^2 = 0$.

Aufgabe 17

Es handelt sich in allen Fällen um auf ganz \mathbb{R} definierte Ungleichungen, es gilt also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, und wir nehmen für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige äquivalente Umformungen der ursprünglichen Ungleichung vor.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 4x + 3 \leq 2(x - 6) \\ \Leftrightarrow & 4x + 3 \leq 2x - 12 \\ \Leftrightarrow & 2x \leq -12 - 3 \\ \Leftrightarrow & x \leq -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{15}{2}]$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{x-1}{2} \geq \frac{1-x}{3} \\ \Leftrightarrow & x - 1 \geq \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow & \frac{5}{3}x \geq \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow & x \geq 1 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = [1, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 4(1-x) + 3(x+2) < 8 \\ \Leftrightarrow & -4x + 3x < 8 - 4 - 6 \\ \Leftrightarrow & -x < -2 \\ \Leftrightarrow & x > 2 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = (2, \infty)$.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 3x - 1 \leq 2(x - 3) - (2 - x) \\ \Leftrightarrow & 3x - 2x - x \leq 1 - 6 - 2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leq -7 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 9x \geq \frac{3(6x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & 9x - 9x \geq -3/2 \\ \Leftrightarrow & 0 \geq -3/2 \end{aligned}$$

Dies ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & -7x \geq \frac{3(x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & -14x - 3x \geq -3 \\ \Leftrightarrow & -17x \geq -3 \\ \Leftrightarrow & x \leq \frac{3}{17} \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = (-\infty, \frac{3}{17}]$.

Aufgabe 18

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 3^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow & 1 < (1/2)^{1/2} \cdot 3^{1/2} \\ \Leftrightarrow & 1 < (3/2)^{1/2} \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist erfüllt, da $3/2 > 1$ und damit auch $(3/2)^{1/2} > 1$ gilt.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (1+a)^2 \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & 1+2a+a^2 \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & a^2 \leq 0, \end{aligned}$$

und dies ist genau dann erfüllt, wenn $a = 0$.

c) Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & a^2 > 2, \quad a \in \mathbb{Z}, \\ \Leftrightarrow & |a| > \sqrt{2} \quad a \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und dies ist wegen $a \in \mathbb{Z}$ genau dann erfüllt, wenn $|a| \geq 2$ ist, also wenn $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ gilt.

d) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+a}{a}\right) > \left(\frac{a}{a-1}\right) \quad (\text{Beachte: wegen } a > 1 \text{ sind beide Nenner positiv}) \\ \Leftrightarrow & (1+a)(a-1) > a^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 - 1 > a^2 \\ \Leftrightarrow & -1 > 0, \end{aligned}$$

was eine falsche Aussage ist. Also ist auch die ursprüngliche Ungleichung falsch, sie wird also für kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ erfüllt.

Aufgabe 19

Für $x = 0$ ist die Ungleichung nicht definiert und für $x < 0$ offensichtlich nicht erfüllt. Sei also $x > 0$. Dann gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geq 10 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 \geq 0$$

Dem entspricht eine nach oben geöffnete Parabel. Quadratisches Ergänzen liefert die Nullstellen $5 + 2\sqrt{6}$ und $5 - 2\sqrt{6}$. Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung erfüllt ist, ist somit gleich $(0, 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}, \infty)$.

Aufgabe 20

a) 720 b) 42 c) 36 d) 25 e) 251 f) $\frac{5}{3}$ g) 35

Aufgabe 21

a), b) und c) stimmen nicht, fast jede Zahlenkombination führt zu einem Gegenbeispiel. Bei d) Definition einsetzen, dann auf einen Bruch erweitern, Ausklammern, fertig. Die Regel findet sich im PASCALschen Dreieck.

Aufgabe 22

(ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge) Es gibt insgesamt $\binom{49}{6}$ gleichwahrscheinliche Ziehungen.

Aufgabe 23

In jeder Spalte (Vertikalen) und Reihe (Horizontalen) muss genau ein Turm stehen. Den Turm in der 1. Spalte können wir in eine beliebige Zeile stellen, haben also 8 Möglichkeiten. Für den Turm der 2. Spalte haben wir dann noch 7 Möglichkeiten usw. Insgesamt haben wir also $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 1 = 8! = 40320$ Möglichkeiten.

Aufgabe 24

(ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge) Es gibt $\binom{22}{11}$ Möglichkeiten, 11 Spieler aus 22 Spielern für Mannschaft 1 auszuwählen. Da jede Wahl doppelt gezählt wurde ist das Ergebnis also $\frac{1}{2} \cdot \binom{22}{11}$.

Aufgabe 25

(ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge) Es gibt $\binom{365}{100}$ mögliche Verteilungen der regenfreien Tage aufs Jahr, also ebenso viele Wetterverläufe.

Aufgabe 26

- a) (ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!}$.
 b) (mit Zurücklegen, mit Reihenfolge) 8^5 .

Aufgabe 27

- a) Das passende Urnenmodell ist mit Reihenfolge und mit Zurücklegen. Also 6^{10} .
 b) Das passende Urnenmodell ist ohne Reihenfolge und mit Zurücklegen. Also $\binom{10+6-1}{10} = \binom{15}{10}$.

Aufgabe 28

Es ist in suggestiver Schreibweise:

- a)
- $\Omega = \{KKK; KKZ; KZK; KZZ; ZKK; ZKZ; ZZK; ZZZ\}$
 - $A = \{ZKK; ZKZ; ZZK; ZZZ\}$
 - $B = \{KZK; KZZ; ZZK; ZZZ\}$
 - $C = \{KKZ; KZZ; ZKZ; ZZZ\}$
 - $A \cap B = \{ZZK; ZZZ\}$
 - $A \cap B \cap C = \{ZZZ\}$
- b) $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$, also unabhängig, Rest analog
 c) $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(A \cap B \cap C)$, also unabhängig

Aufgabe 29

Sei K das Ereignis, daß die Person krank ist, sei P das Ereignis, daß der Test positiv zeigt. Dann ergibt sich folgende Vier-Felder-Tafel:

	K	\bar{K}	
P	0,098	0,135	0,233
\bar{P}	0,002	0,765	0,767
	0,1	0,9	1

Damit ist

$$P(K|P) = \frac{P(K \cap P)}{P(P)} = 0,4206.$$

Aufgabe 30

Es ergibt sich folgende Vier-Felder-Tafel:

	A	\bar{A}	
B	0,001	0,001	0,002
\bar{B}	0,079	0,919	0,998
	0,08	0,92	1

Das liefert die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cup B) = 0,081; P(A|B) = 0,5; P(B|A) = 0,0125; P(A \setminus B) = 0,079; P(\bar{A} \cap B) = 0,001; P(B|\bar{A}) = 0,00109.$$

Aufgabe 31

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Damit lassen sich die gesuchten Größen berechnen:

$$E(X) = \sum_{k=2}^{12} k \cdot P(X = k) = 7; \text{Var}(X) = \sum_{k=2}^{12} (k - E(X))^2 \cdot P(X = k) = \frac{35}{6}; \sigma = \sqrt{\frac{35}{6}}.$$

Für die Varianz gibt es als Alternative die Formel

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

die die Rechnung etwas vereinfacht.

Aufgabe 32

Die Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der Personen mit Nebenwirkungen}$$

ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0,98$. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind

$$P(X = 0) = 0,98^{50} = 0,3642 \text{ und } P(X \leq 1) = 0,7358.$$

Aufgabe 33

- $P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot \frac{1}{4}^4 \cdot \frac{3}{4}^{16} = 0,1897$
- $P(X < 2) = \sum_{k=0}^1 \binom{20}{k} \cdot \frac{1}{4}^k \cdot \frac{3}{4}^{20-k} = 0,0243$
- $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 \binom{20}{k} \cdot \frac{1}{4}^k \cdot \frac{3}{4}^{20-k} = 0,0913$

- $P(X \geq 18) = \sum_{k=18}^{20} \binom{20}{k} \cdot \frac{1}{4}^k \cdot \frac{3}{4}^{20-k} = 1,6 \cdot 10^{-9}$

- $P(3 \leq X < 7) = \sum_{k=3}^6 \binom{20}{k} \cdot \frac{1}{4}^k \cdot \frac{3}{4}^{20-k} = 0,6945$

Zur Übung mit der Verteilungsfunktion: $= F(6) - F(2)!$

- $P(3 < X \leq 7) = \sum_{k=4}^7 \binom{20}{k} \cdot \frac{1}{4}^k \cdot \frac{3}{4}^{20-k} = 0,6730$

Zur Übung mit der Verteilungsfunktion: $= F(7) - F(3)!$